Centre universitaire de Mila
Institut des Mathématiques et Informatiques
Deuxième année LMD Mathématiques et Mathématiques Appliquées 2023/2024

Matière : *Algèbre 4* Durée : 1h30m
Responsable : *Y. Halim*

Examen final

Le 12/05/2024

Exercice 1 : (4 pts)

1. Soit f une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que
$$\dim ker f = n - 1.$$

2. Soit H un hyperplan de E, et D un droite vectorielle de E non contenue dans H. Montrer que
$$E = H \oplus D.$$

Exercice 2 : (12 pts)

Soit f_α la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$f_\alpha((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \alpha x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - \alpha x_3 y_3 - x_1 y_3 - y_1 x_3$$

Première partie :

1. Déterminer A_α la matrice de f_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer, en fonction de α, $F^\perp$ l'orthogonal de $F =< (1, -1, 2) >$.
3. Déterminer $Ann(f)$ le noyau de f. Est-ce que une forme non dégénérée ?

Seconde partie :

1. Déterminer q_α la forme quadratique associée a f_α.
2. En appliquant l'algorithme de Gauss, décomposer q_α sous forme de carrés.
3. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre α, le rang et la signature de q_α.
4. On suppose $\alpha \neq 0$, déterminer une base orthogonal pour q_α.

Exercice 3 : (4 pts)

Soit E un k-espace vectoriel, q une forme quadratique sur E et f sa forme polaire.

1. Montrer les identités $\forall (x, y) \in E \times E : f(x, y) = \frac{1}{4}[q(x + y) - q(x - y)]$
2. En déduire l'équivalence suivante :

$$q(x) = q(y) \Leftrightarrow f(x + y, x - y) = 0$$

Bon courage