Centre Universitaire de Mila
Institut des Mathématiques et informatiques
Deuxième année LMD Mathématiques et Mathématiques Appliquées 2024/2025

---

Matière : *Algèbre 4*
Responsable : *Y. Halim*

# Série de TD N° 3

***Exercice 1 :*** ( Examen 2024)

Soit $E$ un $k$-espace vectoriel, $q$ une forme quadratique sur $E$ et $f$ sa forme polaire.

1. Montrer les identités $\forall(x,y) \in E \times E : f(x,y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$
2. En déduire l'équivalence suivante :

$$q(x) = q(y) \Leftrightarrow f(x+y, x-y) = 0$$

***Exercice 2 :***

Soit q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q((x_1, x_2, x_3)) = x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2x_3.$$

1. Déterminer la forme polaire associée à q .
2. Déterminer la matrice de $q$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $ker(q)$ le noyau de $q$ et $rg(q)$ le rang de $q$.
4. $q$ est-elle non dégénérée ?

***Exercice 3 :***

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $q$ la forme quadratique associée.
2. Déterminer $f$ la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^3$ dont $A$ est la matrice associée de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $B' = \{(1,0,0); (-1,1,0); (-1,1,1)\}$ une base de de $\mathbb{R}^3$.
   - Montrer que $B'$ est une base orthogonal.
4. Déterminer $F^\perp$ où $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0, z = 0\}$.

***Exercice 3 :***(Intérrogation 2022)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $f$ la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^3$ dont $A$ est la matrice associée de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $q$ la forme quadratique associée.
3. Montrer que $q$ est non dégénérée.

.

***Exercice 4 :***

On définit les formes quadratiques suivantes dans $\mathbb{R}^3$ :

1. $q_1(X) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3.$
2. $q_2(X) = 3x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3.$
3. $q_3(X) = x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2x_3.$

Donner les réductions de Gauss et en déduire la signature et le rang et une base orthogonal de chacune.

***Exercice 5 :***

Soit q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q((x_1, x_2, x_3)) = x_1x_2 - x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

1. Déterminer la matrice de $q$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$et déduire sa rang.
2. Montrer que $\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \varepsilon_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \varepsilon_3 = (1, 2, 1)$ forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
3. Déduire une forme réduite de $q$ et $sg(q)$ la signature de$q$.
4. Déterminer un vecteur isotrope pour $q$.

***Exercice 6 :*** ( Examen 2024)

Soit $f_\alpha$ la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$f_\alpha\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = \alpha x_1y_1 + 2x_2y_2 - \alpha x_3y_3 - x_1y_3 - y_1x_3$$

1. Déterminer $q_\alpha$ la forme quadratique associée a $f_\alpha$.
2. En appliquant l'algorithme de Gauss, décomposer $q_\alpha$ sous forme de carrés.
3. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre $\alpha$, le rang et la signature de $q_\alpha$.
4. On suppose $\alpha \neq 0$, déterminer une base orthogonal pour $q_\alpha$.

***Exercice 7 :*** ( Examen 2016)

Soit $q_\alpha$ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$q_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (1+\alpha)x_2^2 + (1+\alpha+\alpha^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\alpha x_2x_3$$

1. Déterminer la matrice $A_\alpha$ associée à $q_\alpha$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour les quelles $q_\alpha$ est non dégénérée.
3. Donner une réduction de Gauss de $q_\alpha$.
4. Déterminer suivant les valeurs de $\alpha$ la signature de $q_\alpha$.
5. Déterminer une base orthogonal pour $q_\alpha$.