

Série de td n : 1 de théorie des graphes

Exercice n : 1

Soit T un arbre ayant n sommets.

1. Montrez que T possède exactement $n - 1$ arêtes. 2. Prouvez que tout arbre est connexe et acyclique. 3. Montrez que tout arbre est un graphe minimalement connexe (c'est-à-dire que la suppression d'une seule arête le rend déconnecté).

Exercice 2 : Nombre de feuilles dans un arbre

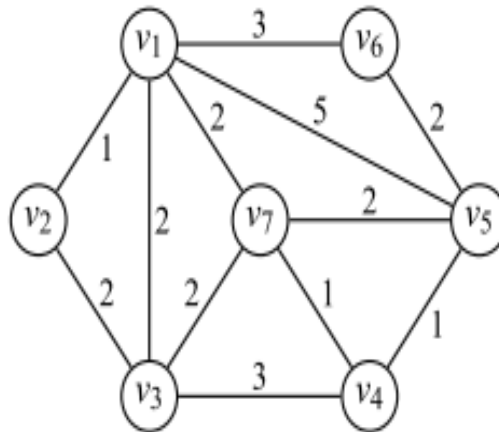
Soit T un arbre ayant au moins un sommet de degré 3 ou plus. Montrez que T possède au moins deux sommets de degré 1.

Exercice 3 : Arborescences et parcours

Soit un graphe orienté acyclique G avec un sommet racine r . Montrez que pour tout sommet v de G , il existe un unique chemin dirigé de r à v .

Exercice 4 : Algorithme de Kruskal

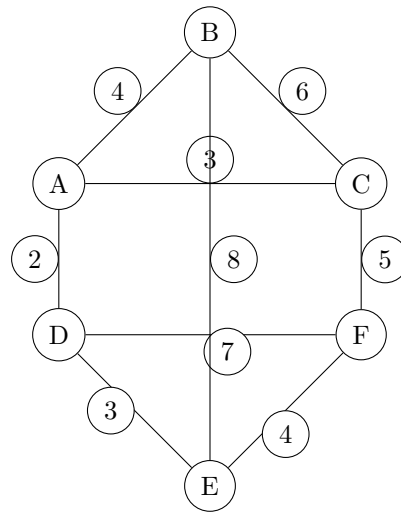
Trouver un arbre couvrant de poids minimum en appliquant l'algorithme de Kruskal sur le graphe ci-dessous.



Exercice 5

Énoncé

Un service régional souhaite raccorder 6 villages à un réseau d'eau potable en minimisant le coût de construction. Les villages sont connectés entre eux comme indiqué ci-dessous, avec les coûts (en milliers d'euros) associés à chaque connexion :



Questions :

1. Modélisez cette situation par un graphe non orienté pondéré.
2. Déterminez un arbre couvrant de poids minimal.
3. Quel est le coût total minimal pour relier tous les villages ?