Chapitre 4 : Caractéristiques géométriques des sections

1.Introduction

Pour une sollicitation de traction et compression simple, seule la donnée de l'aire de la section droite est nécessaire pour étudier ou vérifier la résistance d'une section d'une poutre par exemple, pour toute les autres sollicitations ; la forme et les dimensions de la section droite de la poutre jouent un rôle prépondérant sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion. Nous allons nous intéresser dans le présent chapitre aux caractéristiques suivantes :

- Aire d'une section
- Moment statique par rapport à un axe
- Centre de gravité
- Moment quadratique d'une section par rapport à un axe

2.Aire d'une section

Par définition l'aire S d'une section est définie par l'intégrale:

$$S = \iint ds$$

Où : S est l'aire de la section droite exprimée en (mm^2 ou cm^2…)

ds : est l'élément de de surface.

3.Moments statiques

Soit une surface plane S dans le repère (0, x, y) (figure 1), considérant sur cette surface un élément dS relative au point M. Le moment statique m_Δ de S par rapport à un axe Δ situé à une distance δ de M est défini par :

$$m_\Delta = \iint \delta \, ds$$

Si Δ est confondu avec l'un des axes (0x) ou (0y) on obtient alors:

- le moment statique de la surface S par rapport à l'axe (0 x),

$$m_{ox} = \iint y \, ds$$

- le moment statique de la surface S par rapport à l'axe (0 x),

$$m_{oy} = \iint x \, ds$$

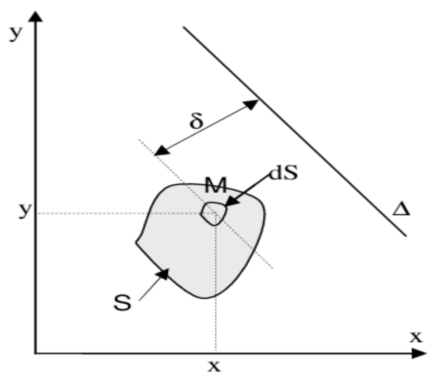


Figure 1

L’unité du moment statique est évidement le m^3

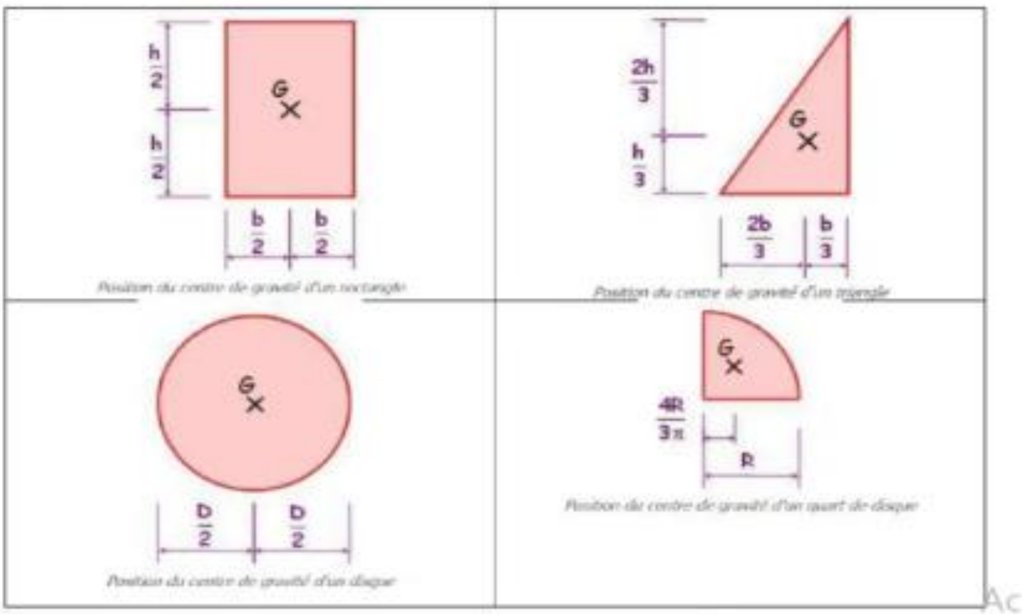
4.Centre de gravité

On appelle centre de gravité d’une section le point d’application du poids de tout le corps. Si on applique une force au centre de gravité d’une section, elle résulte en une pression uniforme sur toute la section.

$$X_G = \frac{1}{S} \iint x\,ds = \frac{\sum xiSI}{\sum SI}$$

$$Y_G = \frac{1}{S} \iint y\,ds = \frac{\sum yi\,SI}{\sum SI}$$

Centre de gravité des sections simples :



5. Moment quadratique d'une surface plane par rapport à un axe de son plan

Définition

Soit la surface plane S du repère (0, y, x) de la figure 1, Le moment quadratique (ou d’inertie) IΔ de S par rapport à un axe Δ est défini par :

$$I_\Delta = \iint \delta^2\,ds$$

Si Δ est confondu avec l'un des axes (0, x) ou (0, y) on obtient alors:

- le moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe (0, x) :

$$I_{ox} = \iint y^2 \, ds$$

- le moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe (0, y) :

$$I_{oy} = \iint x^2 \, ds$$

Remarque :

∗ L'unité de moment quadratique est le mm^4 (ou le m^4)

∗ Un moment quadratique est toujours positif.

6.Théorème de Huygens

Soit l'axe Δ' passant par le centre de gravité G de la surface S, le moment quadratique IΔ est calculé à partir du moment quadratique IΔ' par la formule :

$$\mathbf{I\Delta = I\Delta' + S\, d^2}$$

avec : d : distance entre l'axe Δ et Δ'

Le théorème de Huygens appliqué aux axes (0, x') et (0, y') donne :

$$I_{Ox} = I_{Gx'} + S.Y_G^2$$

$$I_{Oy} = I_{Gy'} + S.X_G^2$$

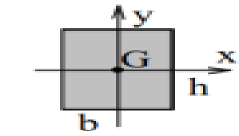
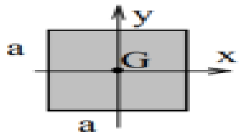
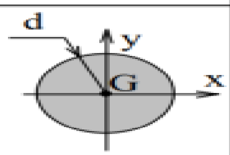
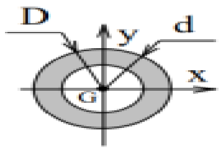
Si une surface S est composée d'un nombre n de surface Si, on a:

$$\mathbf{I_{Ox} = \sum I_{Oxi}} \quad \text{et} \quad \mathbf{I_{Oy} = \sum I_{Oyi}}$$

avec: I_{Oxi}: moment quadratique de la surface Si par rapport à l'axe (0, x)

I_{Oyi}: moment quadratique de la surface Si par rapport à l'axe (0, y)

Exemple de moment quadratique de quelques sections

	I_{GX}	I_{GY}	$I_G = I_O$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$