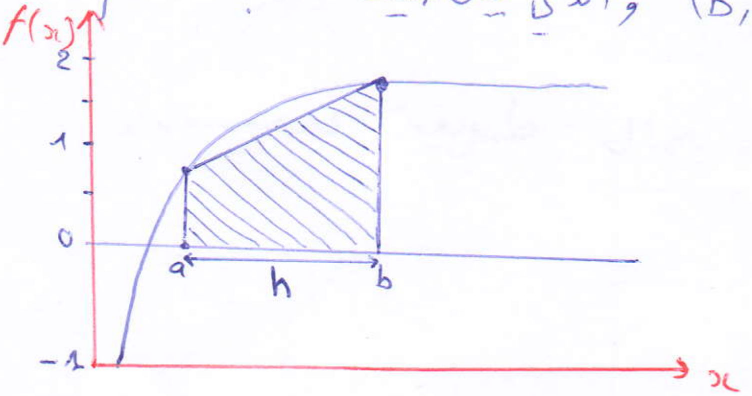
# الفصل الرابع : "التكامل العددي"

في هذا الفصل سوف نتطرق الى بعض الطرق التقريبية لحساب التكامل المحدود. هذه الطرق تسمح بإيجاد حلول لبعض التكاملات التي ليس لها حلول مباشرة أو تحليلية.

## 1.4 صيغة شبه المنحرف "Trapezoid Formula"

هذه الصيغة بسيطة جدا حيث تسمح باستبدال منحنى الدالة $f(x)$ المراد مكاملتها بخط مستقيم الذي يربط النقطة $(a, f(a))$ بالنقطة $(b, f(b))$ والذي يعطينا شبه منحرف كما يوضحه الشكل التالي:




اذن التكامل يستبدل بمساحة شبه المنحرف $S = \int_a^b f(x) = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

حيث $h = b - a$ يسمى بخطوة التكامل. يمكننا ملاحظة وجود فرق معتبر بين المنحنى والخط المستقيم، وهذا الفرق يعتبر كخطأ في الحساب. لتقليص هذا الخطأ، نستعمل صيغة أخرى أكثر دقة من هذه الصيغة.

### 1.1.4 صيغة شبه المنحرف المركبة

نقسم المجال $[a, b]$ الى مجالات جزئية متساوية ونطبق صيغة شبه المنحرف لكل مجال جزئي. اذن تطبيق صيغة شبه المنحرف يعطينا:

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + \cdots + \frac{h}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

### 2.1.3 خطأ التكامل

نرمز بالرمز $R(f)$ للفرق بين التكامل المضبوط و التكامل المحسوب بطريقة شبه المنحرف حيث:

$$|R(f)| = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right] = \left|-\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)\right| \quad , \xi \in [a,b]$$

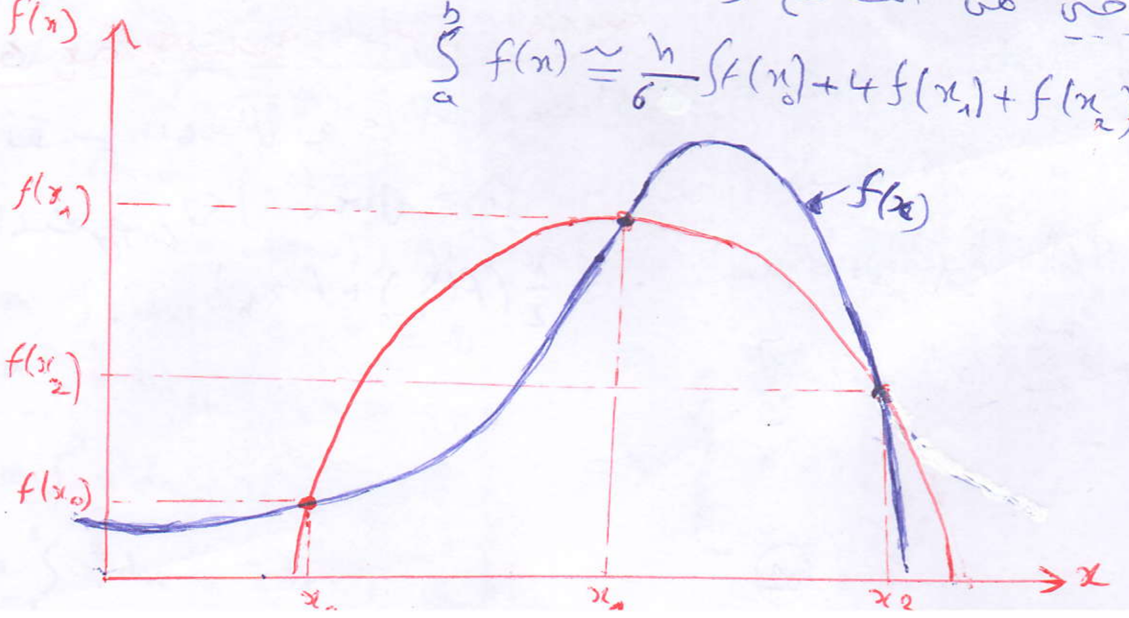
**المثال 01:** احسب التكامل $\int_1^{2,6} \ln(x)\,dx$ باستعمال طريقة شبه المنحرف، بأخذ خطوة التكامل $h=0,15$ . وقارن النتيجة مع نتيجة المضبوطة للتكامل.

**الحل:**

### 2.4- صيغة سمبسون (Simpson formula)

في هذه الصيغة لن نستبدل الدالة بمستقيم بل بقطع ناقص من الدرجة h أقل أو تساوي 2. هذا القطع الناقص سوف يمر بثلاث نقاط $(x_0,y_0)$ ، $(x_1,y_1)$ ، $(x_2,y_2)$ هذا يعني أن هذه الطريقة قابلة للتطبيق من أجل عدد زوجي من المقاطع و تكتب صيغة سيمسون بالعبارة التالية:

$$\int_a^b f(x) \cong \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$



يمكننا تعميم صيغة سيمسون من أجل 2n مجال جزئي

تكون خطوة التكامل $h = \frac{b-a}{2n}$ حيث $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b$

و $x_k = a + hk$ حيث $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$

اذن صيغة سيمسون المعممة تكتب بالعلاقة التالية:

$$\int_a^b f(x) \cong \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{i\ pair} f(x_i) + 4\sum_{i\ impair} f(x_i) + f(x_{2n})\right)$$

وعبارة الخطأ لصيغة سيمسون تكتب:

$$R(f) = -\frac{(b-a)}{2880} h^4 f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in [a,b]$$

المثال رقم 02:

نفس المثال 01 باستعمال طريقة سيمسون

الحل:

المثال رقم 03: ماهو عدد المجالات الجزئية (h) اللازم لتحقيق خطأ أقل أو يساوي $0,5 \cdot 10^{-4}$ يكون المنحرف الشبه بطريقة تكامل للعبارة $\int_1^{1,2} \ln(x)\,dx$

الحل:

## 3.4 طريقة التربيع (Quadrature Method)

تسمح هذه الطريقة بتطوير صيغ التكامل العددي بالإعتماد على كثير حدود لاغرونج (الإستيفاء)، حيث يمكننا إيجاد الصيغ التي ذكرناه سابقا (شبه المنحرف و سيمبسون) بهذه الطريقة و يمكن أيضا إيجاد طرق للتكامل أكثر فعالية. في هذه الطريقة نستبدل الدالة بكثير حدود لاغرونج ثم نقوم بالتكامل:

$$f(x) \cong P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b P_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx$$

بفرض أن $A_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$ نحصل على الصيغة التربيعية

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot A_i \longrightarrow \begin{cases} x_i \text{ تسمى بنقاط التربيع} \\ A_i \text{ تسمى بوزن التربيع} \end{cases}$$

**ملاحظات**

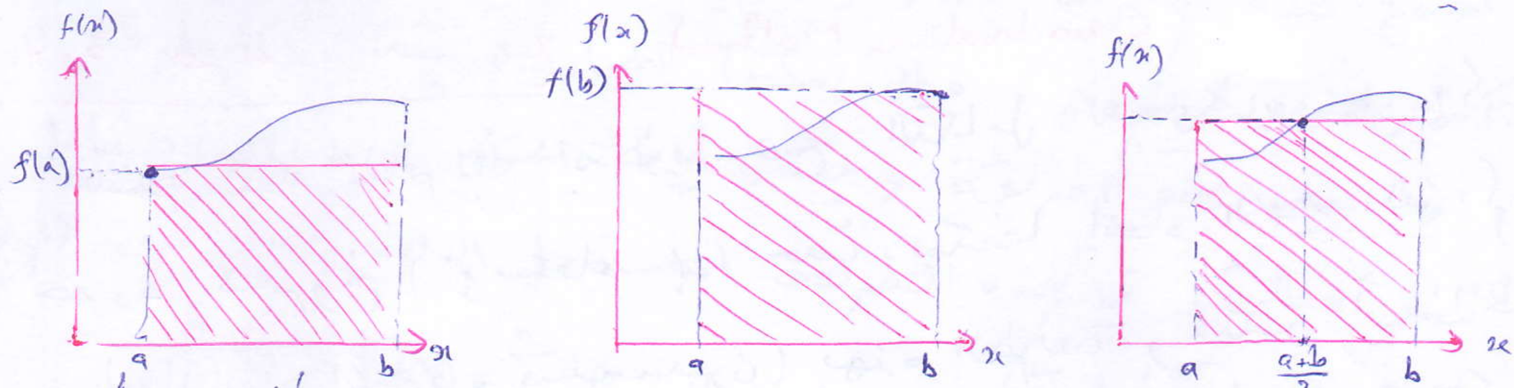
* اذا قمنا بإستيفاء (interpolation) للدالة $f$ على المجال $[a,b]$ يسمى شكل التربيع بالصيغة البسيطة (مثل صيغة شبه المنحرف (1-4))
* اذا قمنا بإستيفاء الدالة $f$ على مجال $[a,b]$ المجزء الى مجالات جزئية متساوية $[x_i, x_{i+1}]$ يسمى شكل التربيع بالصيغة المركبة (مثل صيغة شبه المنحرف المعممة (1.1.4))
* اذا كانت نقاط التربيع معلومة و متساوية يسمى صيغ التربيع بتربيع نيوتن- كوتس (Newton-Cotes quadratures)

* وإذا كانت نقاط التربيع غير معروفة يسمى صنف التربيع بتربيع غوص ( Gauss quadratures )

## 1.3.4 تربيعات نيوتن-كوتس (Newton-cotes - Quadr)

### 1. صيغة المستطيل على اليمين / على اليسار / في نقطة المنتصف)

في هذه الصيغة نقوم باستيفاء الدالة $f$ عن طريق نقطة واحدة




مستطيل على اليسار — مستطيل على اليمين — مستطيل في نقطة المنتصف

نأخذ على سبيل المثال الصيغة البسيطة للمستطيل نقطة المنتصف

$$\int_a^b f(x) \simeq (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

البرهان:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_0(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[x\right]_a^b = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

### 2. صيغة شبه المنحرف البسيطة

نقوم باستيفاء الدالة $f$ بنقطتين للحصول على صيغة شبه المنحرف . هذا يعني أن $f$ ( حيث تكون النقطتين هما حدود المجال $[a.b]$ ) سوف يتم استيفاؤها بكثير حدود لاغرونج من الدرجة 1 والذي نكتب $P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$ بالتكامل نحصل على بالشكل التالي:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

على العلاقة التي ذكرناها سابقا.

البرهان:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_1(x)\,dx \simeq \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b) + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)$$

$$\simeq \frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{1}{2}x^2 - bx\right]_a^b + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2 - ax\right]_a^b \simeq \frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{b^2}{2} - b^2 - \frac{a^2}{2} + ab\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2\right]$$

$$\simeq \frac{(b^2+a^2-2ab)}{2(b-a)} f(a) + \frac{(a^2+b^2-2ab)}{2(b-a)} f(b) \simeq \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

## 3. صيغة سيمبسون البسيطة

للحصول على صيغة سيمبسون البسيطة نقوم باستيفاء الدالة $f$ بثلاث نقاط من المجال $[a,b]$، حيث نستعمل النقطتين الحديتين $a$ و $b$ ونقطة ثالثة وهي نقطة المنتصف. هذا يعني أن الدالة $f$ سيتم استيفاؤها بكثير حدود لاغرونج من الدرجة 2. من الشكل:

$$P_2(x) = f(a)L_0(x) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)L_1(x) + f(b)L_1(x)$$

**واجب منزلي:** برهن صيغة سيمبسون البسيطة التالية:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

## 4. الصيغ التربيعية المركبة:

كما ذكرنا سابقا يمكننا تقسيم المجال $[a,b]$ إلى $n$ مجال جزئي متساوي ($2n$ في صيغة سيمبسون) $I_k=[x_{k-1},x_k]$. هذا يعني $x_k = x_0 + kh$ من أجل $k=0,1,\dots,n$ حيث $h = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. حيث نبني الصيغة المركبة بالاعتماد على الصيغة البسيطة في كل مجال جزئي $I_k$. نلخص جميع الصيغ في الجدول التالي

| الصيغة | الصيغة البسيطة $\int_a^b f(x)dx \simeq$ | الصيغة المركبة $\int_a^b f(x)dx \simeq$ | $E^c$ الخطأ للصيغة المركبة | degré درجة الترميز |
|---|---|---|---|---|
| المستطيل على اليمين | $\simeq h f(b)$ | $\simeq h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$ | $\lvert I_{exa}(f) - I^c_{rap}(f)\rvert \leq \frac{b-a}{24} h^2 \max_{x\in[a,b]} \lvert f''(x)\rvert$ | 0 |
| المستطيل على اليسار | $\simeq h\cdot f(a)$ | $\simeq h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ | | |
| المستطيل في نقطة المنتصف | $\simeq \frac{h}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ | $\simeq h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ | | 1 |
| شبه المنحرف | $\simeq \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$ | $\simeq \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$ | $\lvert I_{exa}(f) - I^c_{trap}(f)\rvert \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x\in[a,b]} \lvert f''(x)\rvert$ | |
| سيمبسون | $\simeq \frac{h}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$ | $\simeq \frac{h}{3}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})+4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + f(b)\right]$ | $\lvert I_{exa}(f) - I^c_{simpson}(f)\rvert \leq \frac{b-a}{2880} h^4 \max_{x\in[a,b]} \lvert f^{(4)}(x)\rvert$ | 3 |

(Gauss quadratures) 2.3.4 تربيعات غوص

في تربيعات نيوتن - كوتس نستعمل نقاط التربيع معروفة ممكن أن تكون حدود المجال أو منتصفه لكن في تربيع غوص لا نستعمل نقاط تربيع معروفة $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ وإنما نقاط أخرى مجهولة في داخل المجال $[a,b]$ وبالتالي أوزان التربيع $A_i$ أيضا مجهولة.

مثلا في صيغة شبه المنحرف كانت الصيغة كما يلي:

$$\int_a^b f(x) \simeq A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

حيث $x_1 = a$ و $x_2 = b$ ووجدنا الأوزان $A_1 = A_2 = \frac{b-a}{2}$. أما في تربيع غوص في $x_1$ و $x_2$ و $A_1$ و $A_2$ كلها مجهولة ويجب البحث عنها بأخذ بعين الاعتبار أن درجة الصيغة التربيعية تكون أكبر من 1.

- أول خطوة هي القيام بعملية تغيير المتغير $x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2}$ للحصول على مجال جديد $[-1,1]$ بدلا من المجال $[a,b]$، لأن كل تربيعات غوص تملك نقاط تربيع في هذا المجال.

- نبحث عن نقاط وأوزان التربيع $x_i$ و $A_i$ بحيث تكون صيغة غوص $\int_{-1}^{1} g(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ ذات $(n+1)$ نقطة والتي تكتب تمايل: تملك الدرجة الأكبر الممكنة.

- نقوم بالحسابات من أجل نقطتين. هذا يعني أنه يجب ايجاد كل المعاملات الأربعة المجهولة في العبارة $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = A_1 g(x_1) + A_2 g(x_2)$ حيث $g(x) = x^k$

نختار دالة قاعدية من أجل اجراء التكامل $g(x) = 1\ (k=0)$, $g(x) = x\ (k=1)$, $g(x) = x^2\ (k=2)$, $g(x) = x^3\ (k=3)$

$$* \int_{-1}^{1} 1\,dx = \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

$$* \int_{-1}^{1} x\,dx = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 = 0$$

$$* \int_{-1}^{1} x^2 dx = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$* \int_{-1}^{1} x^3 dx = \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \\ x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

هذا يعني أن تربيع غوص يمكن كتابته بالعبارة التالية:

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \simeq g\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + g\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

**مثال:** أحسب القيمة المضبوطة للتكامل $I_E = \int_0^{\pi/2} \sin x$

ثم أحسبها بتربيع نيوتن-كوتس من أجل نقطتين (صيغة شبه المنحرف

البسيطة - ثم بتربيع غوص من أجل نقطتين.