2.3. مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين

في كثير من الأحيان نرغب في مقارنة متوسطي مجتمعين ويمكن التمييز بين الحالتين التاليتين:

1.2.3. مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين

يمكن التمييز بين حالتين:

التوزيعات الطبيعية المستقلة المجهولة التباين

إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين نستبدلها بـ S_1^2 و S_2^2 ونميز بين حالتين:

حالة العينات الصغيرة

الحالة الأولى: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1 - \alpha) \%$ من الثقة هو:

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right]$$

الحالة الثانية: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1 - \alpha) \%$ من الثقة هو:

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right]$$

حالة العينات الكبيرة

مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1 - \alpha) \%$ من الثقة بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right]$$

التوزيعات الطبيعية المستقلة المعروفة التباين

لدينا:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

ومنه:

$$P \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha$$

أي أن مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1 - \alpha) \%$ من الثقة هو:

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

أمثلة:

المثال الثاني:	المثال الأول:
<p>أوجد مجال الثقة بمعامل ثقة 95% للفرق $\mu_1 - \mu_2$ إذا علمت أن حجم العينة الأولى 8 ووسطها 81.2 وتباينها 7.6 وحجم العينة الثانية 7 ووسطها وتباينها هما 76.4 و 8.2 على الترتيب، وأن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$</p>	<p>من مجتمع طبيعي متوسطه مجهول وتباينه $\sigma^2 = 25$ سحبنا عينة عشوائية حجمها 9 فكان متوسطها 32، ومن مجتمع طبيعي آخر مستقل عن الأول متوسطه مجهول وتباينه $\sigma^2 = 40$ سحبنا عينة عشوائية حجمها 10 فكان متوسطها 47. المطلوب: إيجاد مجال الثقة بمعامل ثقة 95% للفرق بين متوسطي المجتمعين.</p>
<p>مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1 - \alpha)$ % من الثقة بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:</p> $\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right]$ <p>لدينا:</p> $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} = 2.16$ $S_P^2 = \frac{7.6(8-1) + 8.2(7-1)}{8+7-2} = 7.87$ <p>ومنه مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمعامل ثقة 95% هو:</p> <p>[2.28, 8.52]</p>	<p>مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1 - \alpha)$ % من الثقة هو:</p> $\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$ $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ <p>ومنه مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمعامل ثقة 95% هو:</p> $\left[(32 - 47) - 1.96 \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}}, (32 - 47) + 1.96 \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}} \right]$ $= [-20.1, -9.9]$

2.2.3. مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين غير مستقلين

يمكن التمييز بين حالتين:

التوزيعات الطبيعية المستقلة المجهولة التباين

إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين نستبدلها بـ S_1^2 و S_2^2 ونميز بين حالتين:

حجم العينة $n < 30$

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

ويمكن تعيين مجال ثقة لمتوسط مجتمع الفروق بمستوى ثقة % $100(1 - \alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\bar{D} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}}, \bar{D} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \right]$$

حجم العينة $n \geq 30$

$$\bar{D} \sim N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right)$$

وبمعلومية تباين عينة الفروق ووسطها كمقدرين لوسط مجتمع الفروق وتباينه يكون:

$$Z = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

ويمكن تعيين مجال ثقة تقريبي لمتوسط مجتمع الفروق بمستوى ثقة % $100(1 - \alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط و التحويل كما يلي:

$$\left[\bar{D} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, \bar{D} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \right]$$

لدينا:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

ومنه:

$$P \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha$$

أي أن مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة % $100(1 - \alpha)$ من الثقة هو:

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

مثال:

تم قياس نبض القلب لعينة مكونة من 6 رياضيين فكانت النتائج كما يلي:

67	70	65	60	70	72	قبل التمرين
90	95	93	80	90	99	بعد التمرين

المطلوب: إيجاد مجال الثقة بمعامل ثقة 90% لفرق متوسطي النبض بفرض أن المجتمع طبيعي.

الحل:

23	25	28	20	20	27	d_i
----	----	----	----	----	----	-------

$$n = 6 < 30$$

أي أن مجال الثقة لمتوسط مجتمع الفروق بمستوى ثقة % $(1 - \alpha)100$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[\bar{D} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}}, \bar{D} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \right]$$

بالتعويض نجد مجال الثقة هو:

$$\left[23.83 - (2.015) \frac{3.43}{\sqrt{6}}, 23.83 + (2.015) \frac{3.43}{\sqrt{6}} \right] = [21.009, 26.65]$$

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow t_{0.95,5} = 2.015$$

$$\bar{D} = \frac{\sum d_i}{n} = 23.83$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{D})^2}{n - 1}} = 3.43$$