Centre Universitaire Abdelhafid BOUSSOUF, MILA **2024/2025**
Département Mathématiques 3^{eme} **année Mathématiques Appliquées**

Série de Td n : 3 de Théorie des graphes

Exerice n : 1

Un lycée doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et enfin 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

Exerice n : 2

Dans un tournoi d'échecs, chaque joueur doit rencontrer tous les autres. Chaque partie dure une heure. Déterminez la durée minimum du tournoi dans le cas où le nombre de joueurs est 3, 4, 5 ou 6.

Exerice n : 3

Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de ».

Exerice n : 4

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe.

1. Rappeler la définition d'un cycle dans un graphe.
2. Montrer qu'un graphe admet un circuit eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.
3. Donner un exemple de graphe possédant un circuit eulérien et un autre qui n'en possède pas.

Exerice n : 5

Soit G un graphe connexe non orienté et soit $C(G)$ l'espace vectoriel des cycles de G sur $\mathbb{Z}_2$.

1. Montrer que l'ensemble des cycles fondamentaux associé à un arbre couvrant constitue une base de $C(G)$.
2. Calculer la dimension de cet espace en fonction du nombre de sommets et d'arêtes du graphe.
3. Déterminer une base explicite de $C(G)$ pour un graphe donné.

Exerice n : 6

On considère un graphe connexe $G = (V, E)$. Un cocycle (ou coupure) est un ensemble d'arêtes dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes de G.

1. Montrer que l'ensemble des cocycles forme un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}_2$.
2. Déterminer une base de cet espace.
3. Étudier la relation entre la dimension de l'espace des cycles et celle de l'espace des cocycles.