الجمهـوريـــة الجزائـريــة الديـمقـراطيـــة الشـعـبيـة
Democratic and Popular Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientfiic Research
et de la Recherche Scientfiique

المركز الجامعي عبد الحفيظ بوصوف ميلة
Abdelhafid Boussouf University Center, Mila

Department of Mathematics دائرة الرياضيات

نشرة دروس فيزياء 2
مقياس

فيزياء 2 : مدخل للكهرباء

من إعداد :

◄ الأستاذ بن لطرش محمد الصالح ◄

◄

السنة الجامعية: 2025-2024

المحتويات

مقدمة

أهداف التدريس:
تقديم الظواهر الفيزيائية الأساسية التي تستند إليها قوانين الكهرباء بشكل عام.
المعرفة المسبقة المطلوبة: مفاهيم الرياضيات والفيزياء من السنة الأولى.
محتوى الدورة الفصل الاول مقدمة في مراجعات رياضية

1. عناصر الطول والمساحة والحجم في أنظمة الإحداثيات الكارتيزية والأسطوانية والكروية. الزاوية الصلبة، المشغلون (التدرج، الدوران، نابلا، لابلاسيان، والتباعد).
2. المشتقات والتكاملات المتعددة.

الفصل الثاني : الكهروستاتيكا

1. الشحنات والحقول الكهروستاتيكية. قوة التفاعل الكهروستاتيكي - قانون كولوم.
2. الجهد الكهروستاتيكي.
3. ثنائي القطب الكهربائي.
4. تدفق المجال الكهربائي.
5. مبرهنة غاوس.
6. الموصلات في حالة التوازن.
7. الضغط الكهروستاتيكي.
8. سعة الموصل والمكثف.

الفصل الثالث . الدوائر الكهربائية:

1. الموصل الكهربائي.

باب 1

الفصل الأول: مراجعة الرياضيات

1.1 مقدمة: مراجعة الرياضيات

توفر هذه الدرسة مراجعة رياضية تغطي المفاهيم الأساسية اللازمة لتطبيقات الفيزياء والهندسة. سنراجع عناصر الطول، المساحة، والحجم في أنظمة الإحداثيات المختلفة، بالإضافة إلى المشغلين الرياضيين وتقنيات التفاضل والتكامل الهامة.

2.1 عناصر الطول والمساحة والحجم في أنظمة الإحداثيات المختلفة

سوف نقوم بتحليل العناصر التفاضلية الأساسية في أنظمة الإحداثيات الثلاثة الأساسية: الكارتيزية، والأسطوانية، والكروية. فهم هذه العناصر ضروري لتقييم التكاملات في الفيزياء والهندسة.

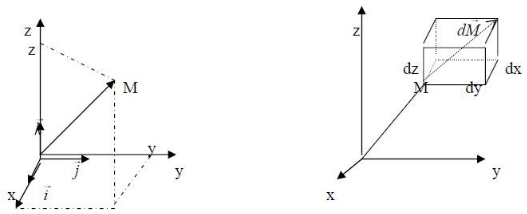
1.2.1 نظام الإحداثيات الكارتيزي

نظام الإحداثيات الكارتيزي يُعرَّف بنقطة الأصل O وثلاثة محاور متعامدة (Ox, Oy, Oz). المتجهات الموحدة على هذه المحاور هي $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. أي نقطة M في الفضاء تمثل بواسطة متجه الموقع:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

مثال: لنفترض حركة خطية على طول المحور x حيث $x = 2t$، $y = 3$، و$z = 0$. متجه السرعة يُعطى بـ:

$$\mathbf{v} = \frac{d\overrightarrow{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = 2\mathbf{i}$$



شكل 1.1: الأساس الكارتيزي (أ) متجه الموضع و(ب) الإزاحة الأولية والحجم

عنصر الطول التفاضلي: الإزاحة التفاضلية تُعطى بـ:

$$d\overrightarrow{OM} = d\,\overrightarrow{l} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

عنصر المساحة التفاضلي: تعتمد مساحة العنصر على مستوى التكامل:

$$dS_x = dydz, \quad dS_y = dxdz, \quad dS_z = dxdy$$

عنصر الحجم التفاضلي: يعطى الحجم الأولي بـ:

$$dV = dx\ dy\ dz$$

نظام الإحداثيات الأسطواني

في نظام الإحداثيات الأسطواني (r, θ, z)، يتم تمثيل النقطة على النحو التالي:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

يمكن أيضًا كتابة:

$$\mathbf{u}_p = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$$

وباستخدام المشتقات بالنسبة لـ θ:

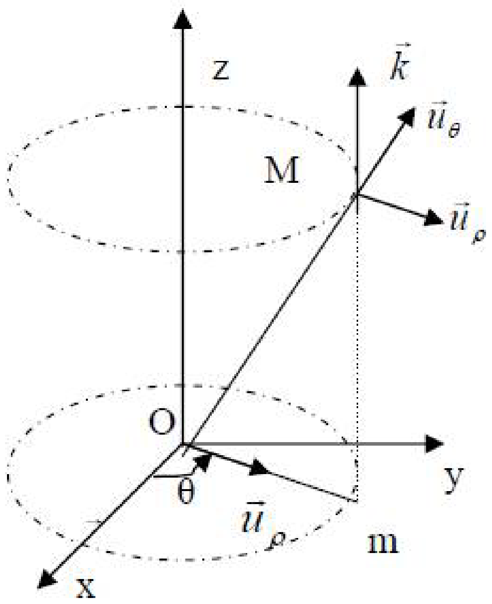
$$d\mathbf{u}_p = d\theta\left(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}\right)$$

بما أن:

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta \quad \text{و} \quad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta.$$

نحصل على:

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta.$$



شكل 2.1: الأساس الأسطواني

متجه الموضع **DM** يُكتب كالتالي:

$$\mathbf{DM} = \rho \mathbf{u}_p + z\mathbf{k} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + z\mathbf{k},$$

حيث يتم تمثيل x و y بإحداثيات كارتيزية:

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad \text{و} \quad z = z.$$

إزاحة العنصر الأولي:

$$d\mathbf{DM} = d\rho\, \mathbf{u}_p + \rho\, d\theta\, \mathbf{u}_\theta + dz\, \mathbf{k}.$$

العنصر المساحي الأولي:

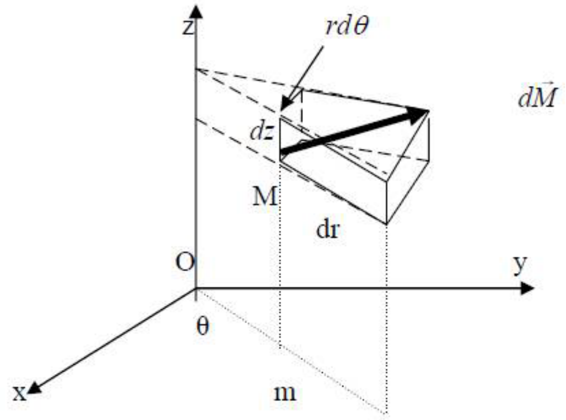
$$ds = \rho\, d\rho\, d\theta.$$

مثال: إيجاد متجه السرعة لجسيم يتحرك في مسار دائري حيث $r = 2$، $\theta = t^2$، و$z = 4t$. مكونات السرعة:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 0, \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = 2(2t), \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 4$$

وبالتالي، متجه السرعة:

$$\mathbf{v} = 0\mathbf{e_r} + 4t\mathbf{e}_\theta + 4\mathbf{e_z}$$



شكل 3.1: إحداثيات أسطوانية

عنصر الطول التفاضلي:

$$d\vec{l} = dr\mathbf{e_r} + rd\theta\mathbf{e}_\theta + dz\mathbf{e_z}$$

عنصر المساحة التفاضلي:

$$dS_r = rd\theta dz, \quad dS_\theta = drdz, \quad dS_z = rdrd\theta$$

عنصر الحجم التفاضلي:

$$dV = rdrd\theta dz$$

2.2.1 نظام الإحداثيات الكروي

في نظام الإحداثيات الكروي (r,θ,ϕ)، يتم تمثيل نقطة كما يلي:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

متجه الموضع للنقطة M في الإحداثيات الكروية، أي في الأساس الكروي، يُكتب على النحو التالي:

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

من الشكل، يمكننا التعبير عن x, y, z بدلالة r,θ,ϕ:

$$X = OM\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$Y = OM\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$Z = OM\cos\theta = r\cos\theta.$$

بالتالي، نحصل على:

$$\overrightarrow{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}.$$

متجه الوحدة $\overrightarrow{u_\varphi}$ عند OM يُكتب كالتالي:

$$\overrightarrow{u_\varphi} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}.$$

يمكن الحصول على هذا المتجه إما عن طريق استبدال φ بـ $\varphi + 2\pi$ أو عن طريق اشتقاق $\overrightarrow{u_r}$ بالنسبة إلى φ:

$$\overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}.$$

يمكن أيضًا التعبير عن هذا المتجه كأساس لاشتقاق $\overrightarrow{u_r}$ بالنسبة إلى φ:

$$\overrightarrow{u_\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\varphi}.$$

المتجه الأساسي الثالث في نظام الإحداثيات الكروي يُعطى بـ:

$$\overrightarrow{u_\theta} = \frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\theta}.$$

الإزاحة الأولية:

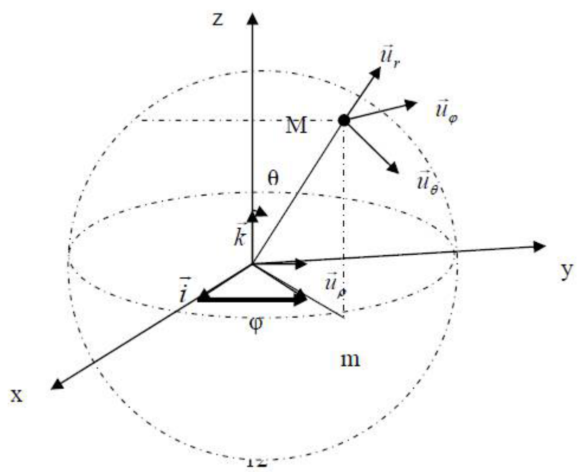
$$d\overrightarrow{M} = d(r\overrightarrow{u_r}) = dr\overrightarrow{u_r} + rd\overrightarrow{u_r} + r\frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\theta}d\theta + r\frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\varphi}d\varphi.$$

$$= dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r(\sin\theta\, d\varphi)\overrightarrow{u_\varphi}.$$

العناصر التفاضلية للمساحة والحجم:

$$dS = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

$$dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$



شكل 4.1: الأساس الكروي

مثال: إيجاد طول القوس الأولي في الإحداثيات الكروية لتغير صغير في θ مع إبقاء r و ϕ ثابتين.

$$dl = rd\theta$$

عنصر الطول التفاضلي:

$$d\vec{l} = dr\mathbf{e_r} + rd\theta\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta d\phi\mathbf{e}_\phi$$

عنصر المساحة التفاضلي:

$$dS_r = r^2\sin\theta d\theta d\phi, \quad dS_\theta = r\sin\theta dr d\phi, \quad dS_\phi = r dr d\theta$$

عنصر الحجم التفاضلي:

$$dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$

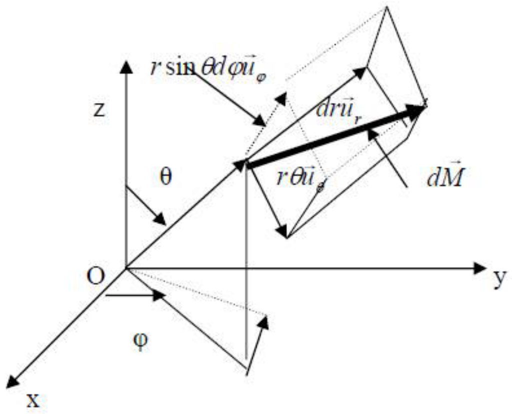
الزوايا الصلبة

الزاوية الصلبة $d\Omega$ في الإحداثيات الكروية تُعطى بالعلاقة:

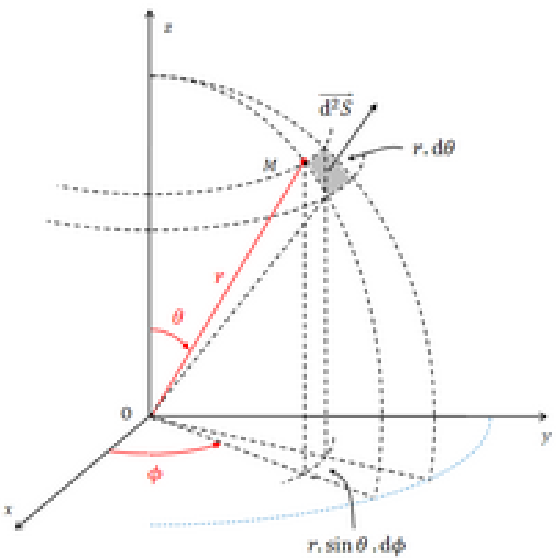
$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

إجمالي الزاوية الصلبة في الفضاء ثلاثي الأبعاد هو:

$$\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\phi = 4\pi$$



شكل 5.1: الحجوم الأولية في الإحداثيات الكروية



شكل 6.1: الزوية الصلبة

3.1 المشغلون في حساب المتجهات

مثال: احسب تدرج الدالة العددية $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$

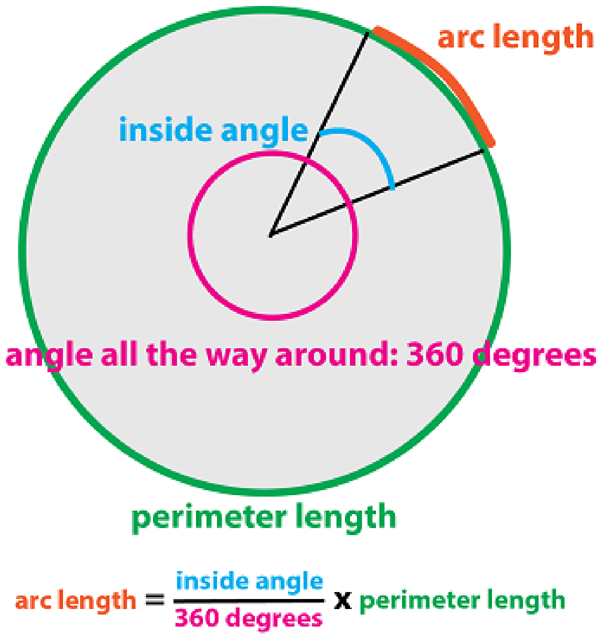
مثال: احسب التباعد لحقل المتجه $\mathbf{A} = (x^2, y^2, z^2)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 2y + 2z$$

هذه الأمثلة تعزز المفاهيم الرياضية الضرورية لتطبيقات الفيزياء.

1.3.1 التطبيقات

حساب محيط دائرة نصف قطرها R (تكامل بسيط).



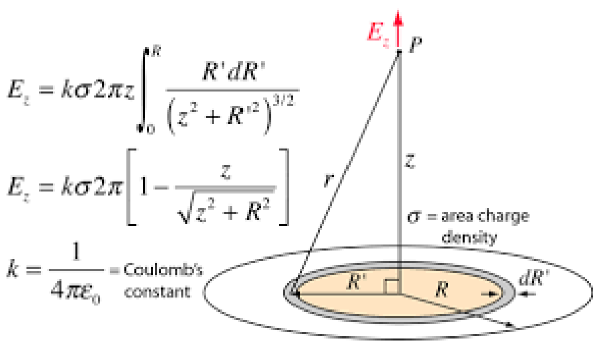
شكل 7.1: محيط دائرة

الحل:

لدينا $dl = R\,d\theta$، وبالتالي:

$$C = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R.$$

حساب مساحة قرص نصف قطره R (تكامل سطحي مزدوج).



شكل 8.1: مساحة قرص

باستخدام العنصر السطحي التفاضلي $dS = dp\,p\,d\theta$، نحصل على:

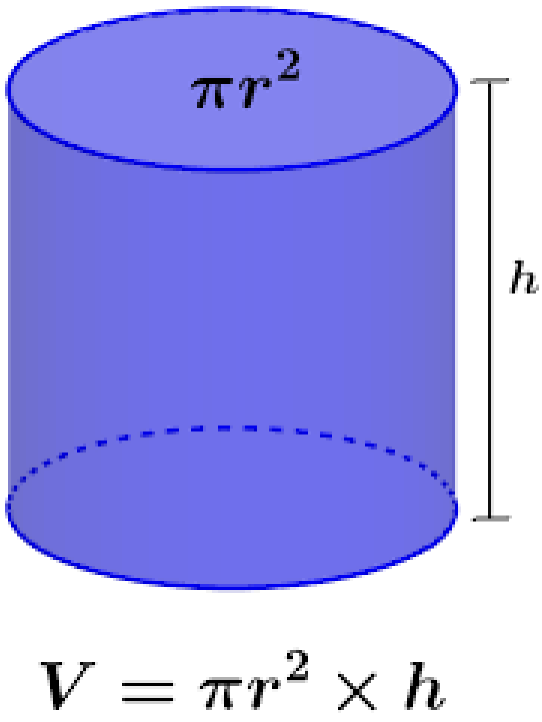
الحل:

$$D = \iint_S dp\, d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho\, d\rho\, d\theta.$$

بتقييم التكامل:

$$D = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho\, d\rho = 2\pi \times \frac{R^2}{2} = \pi R^2.$$

حساب حجم أسطوانة نصف قطرها R وارتفاعها H (تكامل ثلاثي الحجم).



شكل 9.1: حجم أسطوانة

باستخدام العنصر الحجمي التفاضلي $dV = dp\, p\, d\theta\, dz$، نحصل على:
الحل:

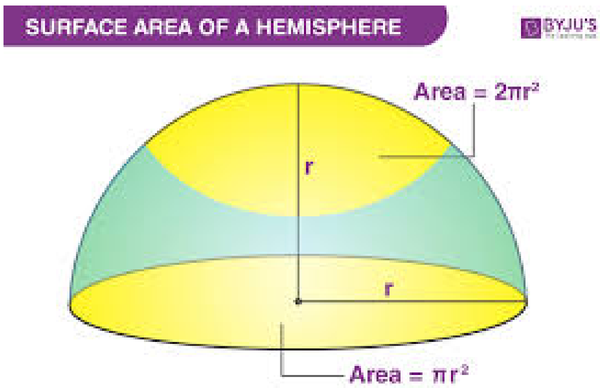
$$V = \iiint_V dp\, d\theta\, dz = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz.$$

بتقييم التكامل:

$$V = \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho\, d\rho.$$

$$V = H \times 2\pi \times \frac{R^2}{2} = \pi R^2 H.$$

حساب مساحة سطح نصف كرة نصف قطرها R (باستثناء القرص الأفقي) (تكامل سطحي مزدوج).



شكل 10.1: مساحة سطح نصف كرة

باستخدام العنصر السطحي التفاضلي $dS = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$، نحصل على:

الحل:

$$D = \iint_S R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi.$$

بتقييم التكامل:

$$D = R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi.$$

$$D = R^2 (-\cos\theta \Big|_0^{\pi}) \times (2\pi) = R^2 (1+1) \times 2\pi = 2\pi R^2.$$

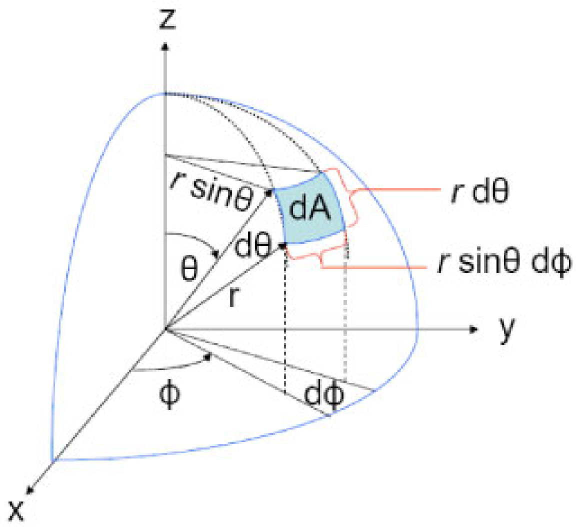
حساب حجم كرة نصف قطرها R (تكامل ثلاثي الحجم).

نستخدم العنصر الحجمي التفاضلي $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$، وبالتالي:

الحل:

$$V = \iiint_V r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi.$$

بتقييم التكامل:



شكل 11.1: حجم كرة

$$V = \int_0^R r^2\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi.$$

$$V = \left(\frac{R^3}{3}\right) \times (-\cos\theta\Big|_0^\pi) \times 2\pi.$$

$$V = \frac{R^3}{3} \times (1+1) \times 2\pi = \frac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

باب 2

الفصل الثاني: الكهروستاتيكا

1.2 الشحنات الكهربائية الأولية

تنشأ الخصائص الكهربائية للمادة على المستوى الذري. تتكون المادة من ذرات، كل منها تتألف من نواة تدور حولها سحابة من الإلكترونات. تتنافر هذه الإلكترونات مع بعضها البعض لكنها تبقى متموضعة حول النواة. تتكون النواة من بروتونات تحمل شحنات موجبة، ونيوترونات متعادلة. يُطلق على مجموعة الجسيمات التي تكوّن النواة اسم النويات.

تحمل الإلكترونات والبروتونات نفس مقدار الشحنة الكهربائية بالقيمة المطلقة، ويرمز لها بـ e. هذه الشحنة الكهربائية، المعروفة بالشحنة الأولية، قيمتها:

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{C} \tag{1}$$

تعريف 1

القوة الكهربائية المؤثرة بين البروتونات الموجبة والإلكترونات السالبة مسؤولة عن تماسك الذرات والجزيئات. تكون الشحنة الكلية للذرات غير المتأينة (أي التي لم تفقد أو تكتسب إلكترونات) مساوية للصفر.

لا يمكن أن تأخذ الشحنة الكهربائية قيمًا عشوائية، بل تكون دائمًا مضاعفًا صحيحًا للشحنة الأولية:

$$Q = \pm ne \quad (\mathrm{C}) \tag{2}$$

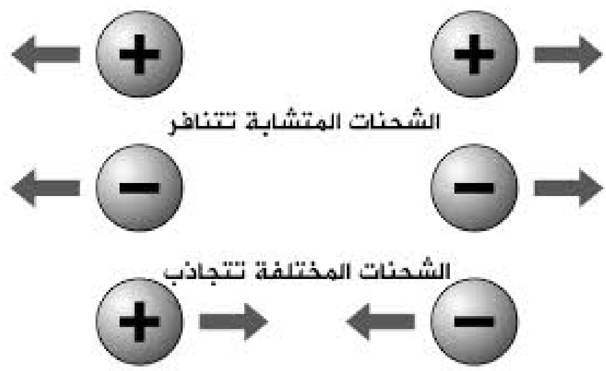
يعبر هذا عن المبدأ الأساسي لتكميم الشحنة.

2.2 تجربة التكهرب

عند فرك قضيب زجاجي بقطعة من الحرير ثم تقريبها من قطع صغيرة من الورق، تنجذب هذه القطع إلى القضيب، مما يشير إلى أن الإلكترونات قد أُزيلت من القضيب.

التجربة الأولى

يتم تعليق كرة صغيرة مصنوعة من خشب البيلسان أو البوليسترين بواسطة خيط. يتم تقريب قضيب زجاجي أو كهرماني، سبق فركه، من الكرة. في البداية، يجذب كل قضيب الكرة ثم بعد التلامس يبدأ في صدها (الشكل 1a.2). ومع ذلك، إذا تم تقريب القضيبين معًا نحو الكرة في نفس الوقت، فلن يحدث شيء (الشكل 1b.2).



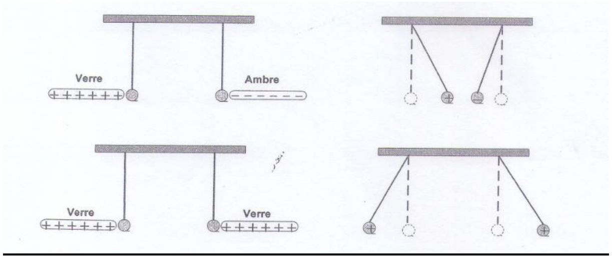
شكل 1.2: تجربة التكهرب

التجربة الثانية

إذا تم شحن كرتين كهربائيًا عن طريق ملامسة قضيب زجاجي مفروك، فإنهما تتنافران. ولكن إذا لامست كل كرة قضيبًا مختلفًا مصنوعًا من مادة مختلفة، فإنهما تتجاذبان. توضح هذه التجارب وجود حالتين من التكهرب، تتوافقان مع نوعين من الشحنات الكهربائية: موجبة وسالبة. ونذكِّر بالقاعدة الأساسية:

الجسمان اللذان يحملان نفس النوع من الشحنة يتنافران، بينما الجسمان اللذان يحملان شحنتين متعاكستين يتجاذبان.

3.2 قانون كولوم



شكل 2.2: التكهرب، التجاذب، والتنافر بين الشحنات

تعريف 1

لنعتبر شحنتين نقطيتين q_1 و q_2 موضوعتين في الفراغ. تؤثر الشحنة الأولى بقوة تتناسب مع q_1 على الثانية، والعكس صحيح. القوة بين الشحنتين، والمعروفة بالقوة الكهروستاتيكية، تتناسب مع حاصل ضرب شحناتهما:

$$\mathbf{F_e} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\mathbf{U_{12}} \tag{3}$$

حيث r هو البعد بين الشحنتين، وK يُعطى بالعلاقة:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \text{حيث} \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\text{ف/م} \tag{4}$$

مثال 1

تطبيق: احسب القوة المؤثرة من الشحنة $q_1 = 3 \times 10^{-3}\text{C}$ على الشحنة $q_2 = -5 \times 10^{-4}\text{C}$ عندما تكون المسافة بينهما 20 ملم.

الحل:

$$F = K\frac{q_1 q_2}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{(3 \times 10^{-3})(-5 \times 10^{-4})}{(20 \times 10^{-3})^2} \tag{5}$$

$$F = 33.75 \times 10^6\text{N} \tag{6}$$

4.2 مبدأ التراكب

لنعتبر شحنة q عند النقطة M بوجود شحنات أخرى q_i تقع عند النقاط M_i. تكون القوة $\mathbf{F}$ المؤثرة على الشحنة q:

$$\mathbf{F} = \sum_i K\frac{qq_i}{r_i^2}\mathbf{U_{iM}} \tag{7}$$

مثال 2

تطبيق: احسب القوة المحصلة المؤثرة على q_3 نتيجة تأثير q_1 و q_2.

5.2 المجال الكهروستاتيكي

يوجد مجال كهربائي عند نقطة في الفضاء إذا كانت شحنة اختبارية q_0 عند تلك النقطة تتعرض لقوة كهروستاتيكية $\mathbf{F_e}$ بحيث:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F_e}}{q_0} \tag{8}$$

1.5.2 المجال الكهربائي لشحنة نقطية

تُنشئ شحنة Q عند النقطة O مجالًا كهربائيًا عند أي نقطة M يُعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{E}(M) = \frac{KQ}{r^2}\mathbf{U_{OM}} \tag{9}$$

6.2 الجهد الكهروستاتيكي

1.6.2 الجهد الكهربائي

تعريف 1

الشغل اللازم لنقل شحنة q_0 من النقطة A إلى النقطة B في مجال كهربائي هو:

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{10}$$

فرق الجهد الكهربائي يُعرَّف بالعلاقة:

$$U_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{11}$$

2.6.2 جهد شحنة نقطية

بالنسبة لشحنة Q عند النقطة O، يكون الجهد الكهربائي على مسافة r:

$$V = K\frac{Q}{r} \tag{12}$$

مع افتراض أن $V = 0$ عند اللانهاية.

7.2 الجهد الكهروستاتيكي

الجهد على مسافة r من شحنة q يُعطى بالعلاقة:

$$V(r) = \frac{Kq}{r} \tag{13}$$

يظل الجهد ثابتًا على كرات نصف قطرها r ومركزها عند الشحنة q، والتي تُعرف بأسطح تساوي الجهد.

1.7.2 الجهد الناتج عن عدة شحنات نقطية مميزة

باستخدام العلاقة بين المجال الكهربائي $\mathbf{E}$ والجهد V، نحصل على:

$$V(M) = \sum_i \frac{Kq_i}{r_i} \tag{14}$$

حيث r_i هو البعد بين الشحنة q_i والنقطة M. يمكن أن تكون الشحنات q_i موجبة أو سالبة.

2.7.2 الجهد الناتج عن توزيع شحنة مستمر

بالنسبة إلى توزيع شحنة مستمر، يتم استخدام التكامل:

$$V(M) = K\int \frac{dq}{r} \tag{15}$$

توزيع حجمي

$$V(M) = K\iiint \frac{\rho dV}{r} \tag{16}$$

حيث ρ هي كثافة الشحنة الحجمية.

توزيع سطحي

$$V(M) = K\iint \frac{\sigma dS}{r} \tag{17}$$

حيث σ هي كثافة الشحنة السطحية.

توزيع خطي

$$V(M) = K\int \frac{\lambda dl}{r} \tag{18}$$

حيث λ هي كثافة الشحنة الخطية.

مثال 3

المجال الكهربائي والجهد الناتج عن حلقة مشحونة: نعتبر حلقة مركزها O ونصف قطرها R، تحمل شحنة q موزعة بشكل منتظم بكثافة خطية للشحنة $\lambda > 0$.
1. احسب الجهد الكهربائي الناتج عند نقطة M الواقعة على المحور Oy وعلى بعد y من النقطة O. 2. استنتج متجه المجال الكهربائي عند النقطة M.
الحل:
بالنسبة للنقطة المعطاة M، القيم r، y، وR تعتبر ثابتة. انطلاقاً من الشكل، **I.8** وبوضع $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$، يمكننا كتابة:

$$dV = K\frac{dq}{r}$$

بإجراء التكامل على التوزيع الكلي للشحنة:

$$\int dV = \frac{K}{r}\int dq \Longrightarrow V = \frac{Kq}{r} + C_\infty$$

من الشكل، نجد أن:

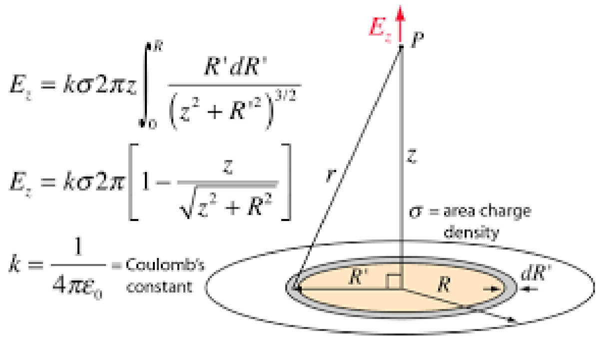
$$r = \sqrt{R^2 + y^2}$$

بعد التعويض بـ K وقيمة $q = \lambda \cdot 2\pi R$، نحصل على التعبير التالي:

$$V = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}} + C_\infty$$

لحساب مقدار المجال الكهربائي E، نقوم باشتقاق تعبير الجهد بالنسبة لـ y، باستخدام العلاقة:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dy} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{y}{(R^2 + y^2)^{3/2}}\vec{u}$$



شكل 3.2: المجال الكهربائي والجهد الناتج عن حلقة مشحونة

مثال 4

المجال الكهربائي والجهد الناتج عن قرص مشحون: نعتبر قرصًا مركزه O ونصف قطره R، مشحونًا بشكل منتظم على سطحه بكثافة سطحية للشحنة σ حيث $\sigma > 0$.

1. احسب المجال الكهربائي والجهد الناتجين عن هذا التوزيع عند نقطة M على المحور (Oz).

للقيام بذلك، نقوم بتقسيم القرص إلى حلقات ذات نصف قطر ρ وعرض $d\rho$. لنأخذ نقطة P على الحلقة، ونقطة P' التي تمثل النقطة المتماثلة لها بالنسبة للمركز O.

تحليل التماثل: بما أن التوزيع متماثل دورانياً حول المحور OZ، فإن أي مستوى يحتوي على المحور OZ يعتبر مستوى تناظر للتوزيع. وبالتالي، فإن المجال الكهربائي $\vec{E}$ عند نقطة M على المحور OZ يكون موجهاً على طول $\vec{k}$:

$$\vec{E}(M) = E(0,0,Z) = E(Z)\vec{k}$$

حساب المجال الكهربائي: عنصر الشحنة $dq = \sigma\, ds$ الموجود عند النقطة P (كما هو موضح في الشكل (II-9 يولد عند نقطة M على محور القرص مجالًا كهربائيًا تفاضليًا:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}$$

حيث أن $ds = \rho\, d\rho\, d\theta$ و$r = \sqrt{\rho^2+Z^2}$.

بما أن القرص يتمتع بتماثل دوراني حول محوره (مثلاً، المحور ZZ)، فإن المجال يكون موجهًا على هذا المحور. نحصل على:

$$d\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\rho^2+Z^2}\vec{u}$$

$$d\vec{E}_Z = d\vec{E}\cos\alpha = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta \cos\alpha}{\rho^2+Z^2}\vec{k}$$

حساب المجال الكهربائي الكلي عند النقطة M: بإجراء التكامل على سطح القرص بالكامل:

$$E(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\rho^2+Z^2}\cos\alpha$$

بما أن:

$$\cos\alpha = \frac{Z}{r}$$

فإننا نحصل على:

$$E(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\rho^2+Z^2}\frac{Z}{\sqrt{\rho^2+Z^2}}$$

$$E(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{Z}{|Z|} - \frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}\right)\vec{k}$$

تحليل السلوك عند القيم القصوى: - عندما يكون Z كبيرًا، يضعف المجال الكهربائي. - عندما يكون $Z \ll R$ ويكون M قريبًا جدًا من القرص، يصبح المجال الكهربائي:

$$E(M) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$$

حساب الجهد الكهربائي عند النقطة M: يمكن اشتقاق الجهد من العلاقة:

$$\vec{E}(M) = -\nabla V(M) = -\frac{dV}{dZ} \vec{k}$$

وبالتالي، نجد أن:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(Z - \sqrt{R^2 + Z^2} \right)$$

تعطي هذه النتائج وصفًا دقيقًا للمجال الكهربائي والجهد الناتجين عن توزيع شحنة على حلقة أو قرص، وتساعد في فهم كيفية تأثير توزيع الشحنة على المجال الكهربائي في نقاط مختلفة من الفضاء.

8.2 الطاقة الكهروستاتيكية

1.8.2 طاقة شحنة نقطية في مجال كهربائي

تعريف 1

الشغل المبذول لنقل شحنة q من النقطة A إلى النقطة B في مجال كهربائي $\mathbf{E}$ هو:

$$W_{AB} = q(V_A - V_B) \tag{19}$$

2.8.2 طاقة نظام من الشحنات النقطية

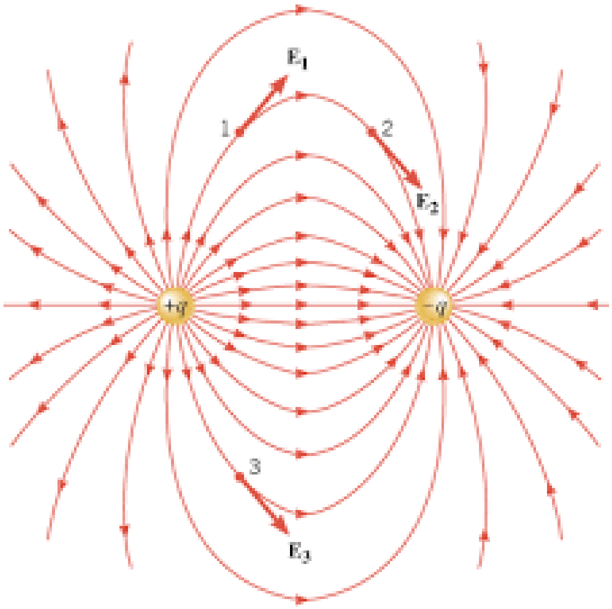
الطاقة الكهروستاتيكية الكلية W لنظام من الشحنات النقطية تُعطى بالعلاقة:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \tag{20}$$

3.8.2 طاقة توزيع شحنة مستمر

$$W = \frac{1}{2}\iiint \rho V dV \qquad (21)$$

9.2 ثنائي القطب الكهربائي



شكل 4.2: ثنائي القطب الكهربائي

تعريف 1

يتكون ثنائي القطب الكهربائي من شحنتين متساويتين ومتعاكستين مفصولتين بمسافة صغيرة. يُعطى عزم ثنائي القطب **p** بالعلاقة:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a} \qquad (22)$$

1.9.2 الجهد الناتج عن ثنائي القطب

الجهد عند نقطة P بسبب ثنائي القطب يُعطى بالعلاقة:

$$V = \frac{Kp\cos\theta}{r^2} \qquad (23)$$

2.9.2 المجال الكهربائي لثنائي القطب

يتم التعبير عن المركبتين الشعاعية والزواوية للمجال الكهربائي كما يلي:

$$E_r = \frac{Kp(2\cos\theta)}{r^3} \tag{24}$$

$$E_\theta = \frac{Kp\sin\theta}{r^3} \tag{25}$$

10.2 نظرية غاوس

الأهداف:

القدرة على تقديم التعبير عن المجال الكهروستاتيكي الناتج عن مصدر يتمتع بدرجة عالية من التماثل بسرعة.

1.10.2 المتطلبات المسبقة:

برسم شبكتين من الخطوط على أي سطح، يتم تقسيم السطح إلى مناطق أصغر يحدها هذه الخطوط (انظر الشكل).

إذا كان عدد الخطوط كبيرًا جدًا وموزعًا بالتساوي، فإن كل من هذه المناطق لها مساحة صغيرة جدًا. لنعتبر نقطة P على السطح S. إذا زاد عدد الخطوط إلى ما لا نهاية، فإن المساحة الصغيرة حول النقطة P تقل وتميل إلى الاقتراب من جزء من المستوى المماس عند P إلى السطح S. في الحد النهائي، تصبح مساحتها dS صغيرة جدًا وتطابق جزءًا من المستوى. يُطلق عليها اسم عنصر السطح المحيط بالنقطة P. وهكذا، يمكن اعتبار أي سطح S على أنه تجاور لعدد لا نهائي من عناصر السطح dS.

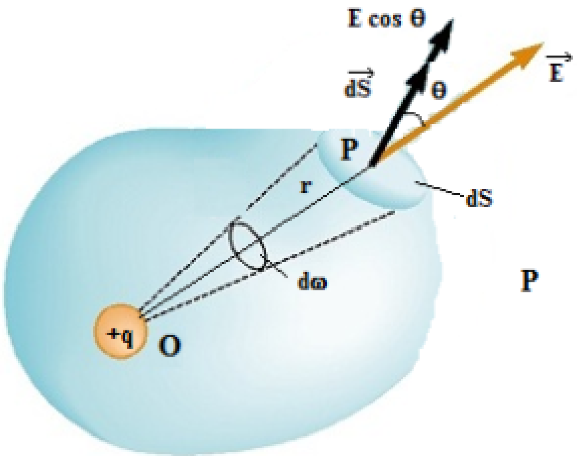
2.10.2 عنصر السطح:

لنعتبر عنصر سطح مساحته dS.

نربط بهذا العنصر متجهًا يسمى المتجه العمودي$\vec{dS}$، يُعرف كما يلي:

- أصله نقطة P على العنصر. - اتجاهه عمودي على السطح. - مقداره يساوي المساحة dS.

المتجه $\vec{dS}$ هو إذن متجه صغير جدًا. يتم اختيار اتجاهه عشوائيًا (إلى الخارج للأسطح المغلقة).
لتوجيه $\vec{dS}$، يمكن أيضًا استخدام قاعدة المفتاح اللولبي. يتم توجيه الخط C الذي يحد السطح من



شكل 5.2: نظرية غاوس

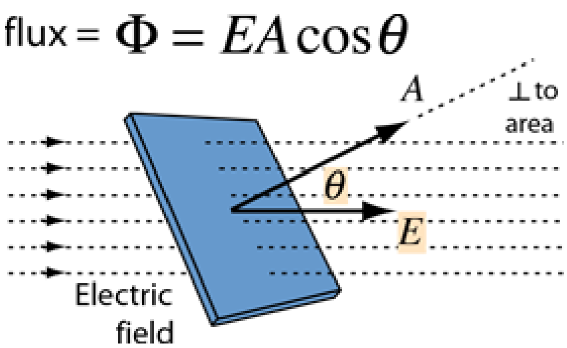
خلال اختيار اتجاه إيجابي للتنقل. يتم توجيه المتجه $\vec{dS}$ وفقًا لتقدم المفتاح اللولبي الذي يدور في اتجاه C.

3.10.2 نص نظرية غوص :

تعريف 1

تعتمد نظرية غاوس على مفهوم تدفق المتجه. يتم تقديم هذا المفهوم الجديد فيما يلي. ومع ذلك، فإن إتقان جيد للعمليات المتجهية الأساسية، ولا سيما الضرب النقطي، ضروري.

11.2 مفهوم التدفق



شكل 6.2: التدفق

تعريف 1

لنعتبر $\vec{E}$ كمتجه المجال الكهربائي عند نقطة P. ولنعتبر $d\vec{S}$ عنصر السطح المحيط بهذه النقطة والمتجه المقابل.

تعريف 2

يُعرف تدفق المجال الكهربائي $d\Phi$ عبر عنصر السطح $d\vec{S}$ بالعلاقة:

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

هذا ما يُعرف باسم التدفق الأولي للإشارة إلى أنه يتعلق بعنصر سطح معين.

1.11.2 إشارة التدفق:

تعتمد إشارة التدفق على اتجاه المتجه $d\vec{S}$. لنأخذ، على سبيل المثال، المتجهين المتعاكسين $d\vec{S}$ و $-d\vec{S}$ المرتبطين بعنصر السطح.

إذا كان المتجه $d\vec{S}$ يصنع زاوية θ مع المجال الكهربائي $\vec{E}$، فإن المتجه $-d\vec{S}$ يصنع زاوية $\pi-\theta$، وبما أن $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$، فإن ناتجي الضرب النقطي $\vec{E}\cdot d\vec{S}$ و $\vec{E}\cdot(-d\vec{S})$ لهما قيم متعاكسة.

لحساب التدفق الجبري للمجال الكهربائي $\vec{E}$ عبر عنصر سطح $d\vec{S}$، من الضروري إذن اختيار اتجاه المتجه $d\vec{S}$ وفقًا لمفهوم التدفق الموجب.

2.11.2 تدفق مجال كهربائي عبر سطح مغلق

يعطى تدفق المجال الكهربائي $\mathbf{E}$ عبر سطح مغلق S بالعلاقة:

$$\Phi = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \tag{26}$$

حيث Q_{enc} هي الشحنة الكلية المحاطة بالسطح.

3.11.2 حساب التدفق

لنعتبر عناصر السطح التي تُكوّن السطح S. لكل منها، يُحسب التدفق الأولي $d\Phi$. يتم الحصول على التدفق الكلي Φ للمجال الكهربائي عبر السطح S من خلال جمع التدفقات الأولية. يُرمز لهذا المجموع بالصيغة:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

لإجراء هذا الحساب، يتم توجيه المتجهات $d\vec{S}$ المرتبطة بعناصر السطح جميعها إلى نفس جانب السطح S.

4.11.2 تدفق شحنة نقطية

تعريف 3

لنعتبر النقطة P كجزء من عنصر السطح $d\vec{S}$. المجال $\vec{E}$ الذي تنشئه الشحنة q عند النقطة P يكون موجهًا على طول $\vec{r}$ ويشير من q إلى P إذا كانت $q > 0$، ويكون مقداره:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

حيث r هو المسافة بين q وP.
التدفق الأولي لهذا المجال الكهربائي عبر عنصر السطح $d\vec{S}$ المحيط بالنقطة P هو:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\, dS \cos\theta$$

حيث θ هي الزاوية بين $\vec{E}$ و$d\vec{S}$.
لكن، $d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2}$ هو الزاوية الصلبة $d\Omega$ التي تُحددها حواف $d\vec{S}$ كما تُرى من q (هندسيًا، هي مخروط ذو رأس عند q ومتلامس مع عنصر السطح $d\vec{S}$).

12.2 التعبير عن نظرية غاوس

يتم التعبير عن نظرية غاوس كما يلي:

1.12.2 النظرية:

تفسير قانون غاوس للمجال الكهربائي بتفصيل أكثر

ينص قانون غاوس على أن تدفق المجال الكهربائي عبر أي سطح مغلق S يساوي مقدار الشحنة الكلية المحصورة داخل هذا السطح مقسومًا على ثابت السماحية الكهربائية للفراغ ϵ_0. ويمكن التعبير عنه رياضيًا بالمعادلة:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

2.12.2 البرهان:

أ) حالة الشحنات خارج سطح مغلق S:

العناصر $d\vec{S}_1$ و$d\vec{S}_2$ تُرى تحت نفس الزاوية الصلبة $d\Omega$ من حيث القيمة المطلقة. لكن، $\vec{E}_1$ و$d\vec{S}_1$ متوازيان، في حين أن $\vec{E}_2$ و$d\vec{S}_2$ متعاكسان. لذلك، يكون التدفقان $d\Phi_1$ و$d\Phi_2$ متعاكسين في الإشارة. وبالتالي، فإن التدفقات الأولية تلغي بعضها البعض، والتدفق الكلي للمجال $\vec{E}$ الناشئ عن الشحنة q خارج السطح المغلق يساوي صفراً.

ب) حالة الشحنات داخل سطح مغلق S:

مجموع التدفقات الأولية لن يكون صفراً لأن جميع متجهات عناصر السطح، على سبيل المثال، موجهة إلى الخارج من السطح. وبالتالي، يكون التدفق الكلي المرسل بواسطة q عبر S هو مجموع التدفقات الأولية:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

وحدة الزاوية الصلبة هي الزاوية التي تحصر وحدة مساحة على كرة نصف قطرها الوحدة. نظراً لأن المساحة السطحية لكرة الوحدة هي 4π، فإن الزاوية الصلبة التي تغطي الفضاء بالكامل من نقطة هي 4π. ويمتد المجموع على الفضاء بأكمله، أي 4π.

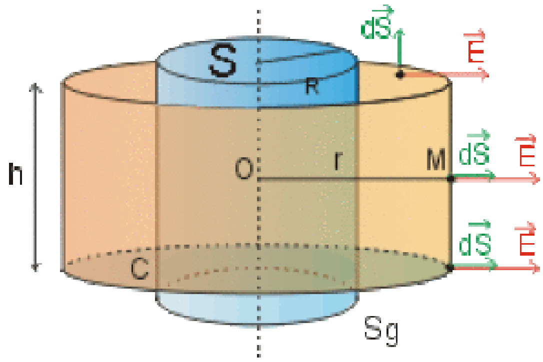
إذا كان هناك N شحنات q_i داخل S:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

بتعريف:

$$Q_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N} q_i$$

فإن تدفق $\vec{E}$ عبر سطح مغلق يساوي $\frac{1}{\epsilon_0}$ مضروباً في مجموع الشحنات الداخلية، بغض النظر عن الشحنات الخارجية.



شكل 7.2: تطبيق نظرية غوص على إسطوانة

3.12.2 تطبيق نظرية غاوس:

يكون تطبيق نظرية غاوس مفيدًا جدًا في المسائل التي تتمتع بدرجة عالية من التماثل. تحقق من هذه الخاصية باستخدام المثال البسيط لحساب المجال $\vec{E}$ الناتج عن شحنة نقطية q.

المحاكاتان التاليتان ستتيحان لك تطبيق نظرية غاوس في حالة بنيتين مشحونتين بشكل منتظم تتمتعان بمحاور تماثل. يمكنك التحقق من مدى سهولة استخدام نظرية غاوس لحساب المجال الكهروستاتيكي الناتج عن هذين التوزيعين المشحونين.

4.12.2 المنهجية

تُعد نظرية غاوس أداة قيمة لتحديد المجال الكهربائي $\vec{E}$ عند أي نقطة P عندما يكون توزيع الشحنات متماثلًا. تتضمن خطوات حساب $\vec{E}$ ما يلي:

1. تحديد اتجاه المجال باستخدام اعتبارات التماثل.
2. اختيار سطح غاوسي S (وهمي، بدون واقع مادي): - يمر عبر النقطة محل الاهتمام P. - يكون أكثر ملاءمة لتبسيط تعبير تدفق $\vec{E}$ من خلاله. - يمتلك نفس خصائص التماثل التي يمتلكها المصدر. - لا يتطابق مع سطح مادي مشحون.
3. التعبير عن التدفق Φ عبر السطح المغلق S.
4. تحديد الشحنة الكلية Q_{int} المحصورة داخل الحجم المحاط بـ S.
5. تطبيق نظرية غاوس:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

إذا كان السطح الغاوسي مُختارًا بشكل جيد، فإن الطرف الأيسر من المعادلة يكون دالة بسيطة في $\vec{E}$ والمسافة r. وبالتالي، يمكن الحصول على تعبير للمجال $\vec{E}$ بدلالة المسافة r والشحنات المصدرية.

حالة التماثل المحوري يقال إن توزيع الشحنة المصدرية يمتلك تماثلًا محوريًا إذا كانت كثافة الشحنة في أي نقطة تعتمد فقط على المسافة من محور معين.
سحابة شحنات أسطوانية ذات كثافة حجمية $\rho = f(r)$

1. طبيعة المجال الكهربائي: - بسبب التماثل المحوري، يكون المجال الكهربائي شعاعيًا (متجهًا للخارج) عند الابتعاد عن حواف المصدر.

2. اختيار السطح الغاوسي المناسب: - أفضل اختيار للسطح الغاوسي هو أسطوانة محورية حول المحور Δ، تمر بالنقطة محل الاهتمام M (والتي يمكن أن تكون داخل المصدر أو خارجه).

حالة النقطة محل الاهتمام خارج المصدر على **السطوح الجانبية** للأسطوانة الغاوسية، يكون كل من متجه المجال الكهربائي $\vec{E}$ وعنصر السطح $d\vec{S}$ متوازيين، بينما يكونان متعامدين على **السطوح العلوية والسفلية** للأسطوانة. وبالتالي، فإن **التدفق الكهربائي عبر السطح المغلق بالكامل S_g** يتبقى فقط عبر السطح الجانبي للأسطوانة:

$$\Phi = \iint_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

حساب التدفق عبر السطح الجانبي

على السطح الجانبي للأسطوانة، تكون $\vec{E}$ و $d\vec{S}$ متوازيين تمامًا، لذا فإن التدفق يصبح:

$$\Phi = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} E \cdot dS$$

بما أن المجال الكهربائي E يكون ثابتًا على السطح الغاوسي، يمكن إخراجه من التكامل:

$$\Phi = E \iint_{S_{\text{lat}}} dS = E S_{\text{lat}}$$

مساحة السطح الجانبي للأسطوانة الغاوسية تساوي:

$$S_{\text{lat}} = 2\pi r h$$

وبالتالي، يصبح التدفق الكهربائي:

$$\Phi = E \cdot 2\pi r h$$

حساب الشحنة داخل السطح الغاوسي الآن، نحتاج فقط إلى تحديد مقدار الشحنة Q_i الموجودة داخل الحجم المحصور بواسطة السطح الغاوسي حسب التوزيع المدروس. وباستخدام مبرهنة غاوس، يمكننا إيجاد المجال الكهربائي E من العلاقة:

$$\Phi = E \cdot 2\pi r h = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

وهذا يتيح لنا حساب المجال الكهربائي بناءً على كمية الشحنة الموجودة داخل الأسطوانة.