SD POUR L'ECONOMIE

M1 MMTD

Le Modèle De Solow

2024-2025

Contrairement aux keynésiens, les néoclassiques considèrent que le capital K et le travail L sont des facteurs substituables dans le temps. Ainsi la fonction de production du modèle néoclassique s'écrit de la façon suivante :

$$Q_t = f(K_t; L_t)$$

On suppose que cette fonction de production est une fonction de **production néoclassique**.

Qu'est-ce qu'on fonction de production néoclassique ?

Une fonction de production est dite néoclassique si elle vérifie les propriétés suivantes :

- **Propriété #1 :** Les rendements factoriels sont positifs et décroissants.

$$PmK_t = \frac{\partial Q_t}{\partial K_t} > 0 \qquad et \qquad \frac{\partial PmK_t}{\partial K_t} < 0$$

$$PmL_t = \frac{\partial Q_t}{\partial L_t} > 0 \qquad et \qquad \frac{\partial PmL_t}{\partial L_t} < 0$$

Cette propriété assure la concavité de la fonction de production.

La deuxième propriété concerne les limites des productivités marginales :

- **Propriété #2 :** Lorsque le capital (le travail) tend vers 0 la productivité marginale de ce facteur tend vers $+\infty$

$$\lim_{K_t \to +\infty} PmK_t = 0 \qquad et \qquad \lim_{L_t \to +\infty} PmL_t = 0$$

$$\lim_{K_t \to 0} PmK_t = +\infty \qquad et \qquad \lim_{L_t \to 0} PmL_t = +\infty$$

Cette propriété nous dit que l'on ne peut pas produire qu'avec un seul type de facteur.

- **Propriété #3 :** Les rendements à l'échelle sont constants.

$$f\left(\lambda K_t; \lambda L_t\right) = \lambda f\left(K_t; L_t\right)$$

Si on double tous les facteurs de production ($\lambda = 2$) alors on double la production.

Remarque : Les rendements seraient croissants si :

$$f\left(\lambda K_t; \lambda L_t\right) > \lambda f\left(K_t; L_t\right)$$

Les rendements seraient décroissant si

$$f\left(\lambda K_t; \lambda L_t\right) < \lambda f\left(K_t; L_t\right)$$

Les conséquences des rendements constants :

En posant $\lambda = 1/L_t$ alors on peut écrire :

$$f\left(\lambda K_t; \lambda L_t\right) = f\left(\frac{K_t}{L_t}; \frac{L_t}{L_t}\right)$$

En posant $k_t = K_t/L_t$, le capital par tête de travailleur, et $y_t = Y_t/K_t$ la production par tête de travailleur, on peut donc écrire la fonction de production par tête en fonction du seul capital par tête :

$$q_t = f(k_t)$$

Le modèle de SOLOW

Solow, Robert, 1956, A Contribution to the Theory of Economic Growth, Quarterly Journal of Economics, 70, 65-94.
(Prix Nobel : 1987)

Hypothèse #1 : On suppose une économie fermée sans État

Cette économie produit un bien homogène Q_t qui sert à l'investissement I_t ou à la consommation. En économie fermée, le revenu de l'économie Y_t est égal à la valeur de la production Q_t. On en déduit l'égalité emplois-ressources :

$$Y_t = Q_t = C_t + I_t$$

Hypothèse #2 : La production se fait en concurrence pure et parfaite.

On en déduit que chaque facteur de production est rémunéré à sa productivité marginale.

Ainsi :

- Chaque unité de capital est rémunérée au taux PmK_t que l'on appelle le taux d'intérêt brut.
- Chaque unité de travail est rémunérée au taux PmL_t que l'on appelle le taux de salaire

Les entreprises cherchent à utiliser du capital et du travail de façon à maximiser leur profit. On suppose le prix de vente du bien unique égal à 1. Le profit va donc s'écrire :

$$\Pi_t = q_t - R_t K_t - w_t L_t$$

La maximisation du profit conduit à :

$$\frac{\partial \Pi_t}{K_t} = 0 \qquad \Leftrightarrow PmK_t = R_t$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{L_t} = 0 \qquad \Leftrightarrow PmL_t = w_t$$

Hypothèse #3 : La fonction de production

La production se fait grâce à une fonction à rendements constants à l'échelle. On ne donne pas de forme fonctionnelle à la fonction de production. On suppose simplement qu'elle est du type :

$$Y_t = Q_t = f\left(K_t; L_t\right)$$

Grâce aux rendements constants à l'échelle et grâce à l'égalité d'Euler, nous vérifions que :

$$Y_t = PmK_t.K_t + PmL_t.L_t$$

Dit autrement, en rémunérant les facteurs de production à leur productivité marginale, la valeur totale de la production est utilisée pour rémunérer le travail et le capital.

On peut écrire la fonction de production par tête :

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = f\left(\frac{K_t}{L_t}; \frac{L_t}{L_t}\right) = f(k_t)$$

De la même façon la production par tête se décompose de la façon suivante :

$$y_t = Pmk_t.k_t + Pml_t = R_t k_t + w_t$$

où R_t est la productivité marginale du capital et w_t le taux de salaire qui est la productivité marginale du travail.

Hypothèse #4 : La fonction de consommation

On suppose que la fonction de consommation est du type :

$$C_t = c.Y_t$$

Où c est la propension à consommer.

On en déduit que l'épargne est :

$$S_t = Y_t - C_t = (1 - c)Y_t = sY_t$$

Où s est le taux d'épargne.

Hypothèse #5 : La croissance de la population

On suppose que l'offre de travail L_t est égale la population N_t et croît à taux constant n.Ainsi :

$$\frac{DN_t}{N_t} = \frac{DL_t}{L_t} = n$$

Remarque : Dans ce modèle, il n'y a pas de chômage, puisque si l'offre de travail est très importante, le taux de salaire s'ajuste en diminuant. Inversement, si l'offre de travail est trop faible, le taux de salaire augmente.

L'équation dynamique fondamentale de l'accumulation du capital

L'investissement brut est donné par : $I_t = S_t = sY_t$ puisque nous sommes en économie fermée. L'accumulation du stock de capital (l'investissement net est :

$$DK_t = I_t - \delta K_t$$

soit :

$$\boxed{DK_t = s.Y_t - \delta K_t}$$

L'équation dynamique fondamentale de l'accumulation du capital par tête

Le capital par tête est $k_t = K_t/L_t$. On en déduit que :

$$Dk_t = D\left(\frac{K_t}{L_t}\right) = \frac{DK_t.L_t - K_t.DL_t}{L_t^2}$$

En arrangeant :

$$\frac{DK_t}{L_t} - nk_t$$

soit encore en utilisant l'expression de DK_t et de la fonction de production par tête :

$$\boxed{Dk_t = s.y_t - (n+\delta)k_t}$$

Interprétation

$$Dk_t = s.y_t - (n + \delta)k_t$$

L'accumulation du capital par tête Dk_t est composé de deux termes :

- Le terme sy_t qui représente l'épargne par tête
- Le terme $(n + \delta)k_t$ qui représente l'investissement requis par tête c'est à dire ce qui est nécessaire pour remplacer le capital usagé (δk_t) et doter les nouveaux nés en capital (nk_t)

Le diagramme de Solow

On va représenter la production par tête en fonction du capital par tête, l'épargne par tête et l'investissement requis par tête.

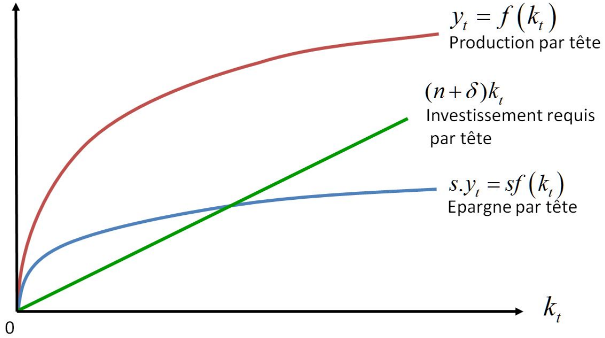

FIGURE – Le diagramme de Solow

L'existence d'un État Stationnaire (ES)

Remarquons que lorsque l'épargne par tête est égale à l'investissement requis par tête alors le capital par tête reste constant :

$$s.y_t = (n+\delta)k_t \Rightarrow Dk_t = 0 \Rightarrow k_t = k^* \forall t$$

Il existe un équilibre que l'on nomme État Stationnaire (ES) lorsque :

$$\frac{k^*}{y^*} = \frac{s}{n+\delta}$$

Remarque : Dans le modèle d'Harrod-Domar, on avait la condition d'équilibre $n+\delta = s/v$ avec $v = K/Y$. On obtient donc le même type de relation. Dans le modèle de Solow le rapport k/y "s'adapte" au ratio $s/(n+\delta)$.

La dynamique du modèle de Solow

Supposons qu'une économie pauvre avec un capital par tête faible ($k_t < k^*$), la production est faible ($y_t < y^*$). On constate que l'épargna par tête est supérieure à l'investissement et donc $Dk_t > 0$: le capital par tête augmente jusqu'à k^*.

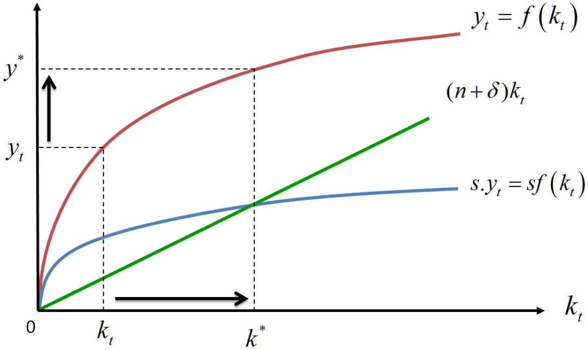

FIGURE – Convergence vers l'ES

La dynamique du modèle de Solow...suite

Supposons qu'une économie riche avec un capital par tête élevé ($k_t > k^*$), la production est élevé ($y_t < y^*$). On constate que l'épargna par tête est inférieure à l'investissement et donc $Dk_t < 0$: le capital par tête diminue jusqu'à k^*.

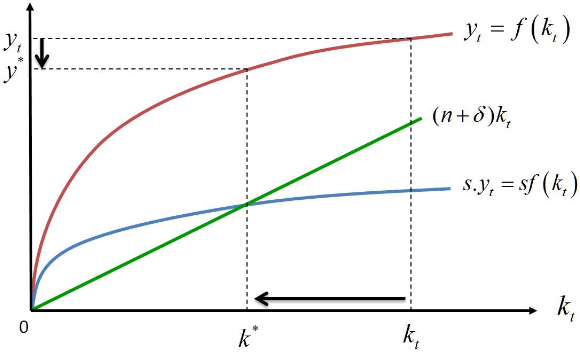

FIGURE – Convergence vers l'ES

Enseignement #1

Nous venons de montrer que le modèle de Solow admet un État Stationnaire vers lequel converge l'économie.

Cet État Stationnaire est déterminé par un capital par tête k^* tel que :

$$\frac{k^*}{y^*} = \frac{s}{n + \delta}$$

Remarque : L'ES dépend du taux d'épargne ainsi que du taux de croissance de la population (on suppose que la dépréciation est identique pour chaque économie)

Enseignement #2

Sous réserve que les économies aient la même fonction de production, le même taux d'épargne, le même taux de croissance de la population et la même dépréciation du capital alors :

Les économies devaient à long terme converger vers le même État Stationnaire (même capital par tête, même production par tête)

Effet du taux d'épargne sur l'ES

Nous supposons que les économie ont les mêmes paramètres sauf en ce qui concerne le taux d'épargne.

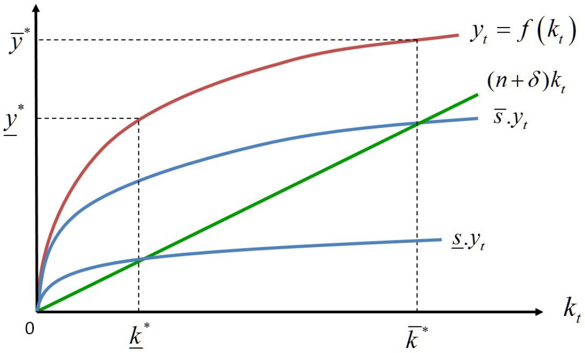

Figure – Effet du taux d'épargne sur l'ES

Enseignement #3

- Un taux d'épargne élevé fait converger l'économie vers un état stationnaire caractérisé par un capital par tête, une production par tête élevés.

- Un taux d'épargne faible fait converger l'économie vers un état stationnaire caractérisé par un capital par tête, une production par tête faible.

Une économie plus économe deviendra plus riche.

Effet du taux de croissance de la population sur l'ES

Nous supposons que les économie ont les mêmes paramètres sauf en ce qui concerne le taux de croissance de la population.

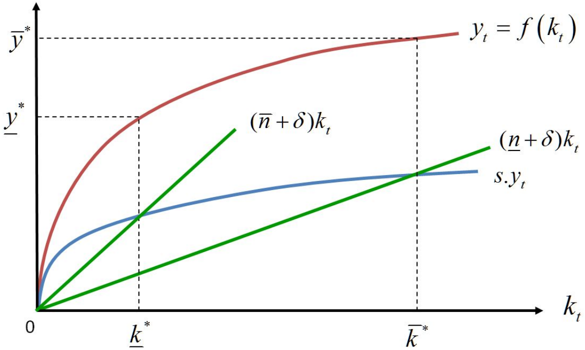

FIGURE – Effet du taux d'épargne sur l'ES

Enseignement #4

- Un taux de croissance de la population élevé fait converger l'économie vers un état stationnaire caractérisé par un capital par tête, une production par tête faible.

- Un taux de croissance de la population faible fait converger l'économie vers un état stationnaire caractérisé par un capital par tête, une production par tête élevé.

Une économie plus fertile deviendra plus pauvre.

Détermination du taux de croissance des variables par tête à l'ES

A l'ES on sait que $Dk_t = 0$. On déduit donc que :

$$\frac{Dk_t}{k_t} = 0$$

Puisque le capital par tête n'évolue pas, la production par tête reste inchangée :

$$\frac{Dy_t}{y_t} = 0$$

Comme la consommation est une part constante de la production, la consommation est constante à l'ES :

$$\frac{Dc_t}{c_t} = 0$$

Enseignement #5

A l'État Stationnaire les variables par tête ont un taux de croissance nul. Dit autrement, le capital par tête, la production par tête et la consommation par tête sont constants :

$$\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = 0$$

Bien que la population augmente, chaque individu, à l'ES, reste aussi riche qu'auparavant.

Pour Solow, l'investissement n'est qu'une source temporaire de croissance.

Détermination du taux de croissance des variables en niveau à l'ES

O sait que $K_t = k_t L_t$. On déduit donc que :

$$\frac{DK_t}{K_t} = \frac{Dk_t}{k_t} + \frac{DL_t}{L_t} = n$$

Comme la fonction de production a des rendement constants à l'échelle :

$$\frac{DY_t}{Y_t} = n$$

Enfin comme la consommation totale C_t est une part constante de la production totale Y_t

$$\frac{DC_t}{C_t} = n$$

Enseignement #6

A l'État Stationnaire les variables en niveau ont un taux de croissance égal au taux de croissance de la population. Dit autrement, le stock total de capital, la production totale et la consommation totale croissent au taux n :

$$\gamma_K = \gamma_Y = \gamma_C = n$$

Visualisation du taux de croissance du capital par tête

L'équation dynamique fondamentale d'accumulation du capital par tête est :

$$Dk_t = s.y_t - (n+\delta)k_t$$

On en déduit facilement que :

$$\gamma_{k_t} = \frac{Dk_t}{k_t} = s.\frac{y_t}{k_t} - (n+\delta)$$

Avec les conditions d'Inada le rapport y_t/k_t tend vers $+\infty$ lorsque k_t tend vers 0 et tend vers 0 lorsque le capital tend vers l'infini. On en déduit :

$$\lim_{k_t \to 0} \gamma_{k_t} = +\infty \qquad et \qquad \lim_{k_t \to +\infty} \gamma_{k_t} = 0$$

Visualisation du taux de croissance du capital par tête

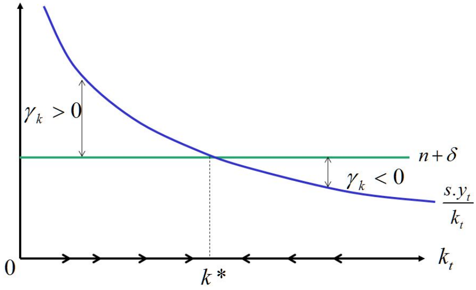

FIGURE – Visualisation de Dk_t/k_t

Plus l'économie a un niveau de capital par tête faible, plus le taux de croissance sera élevé.

Enseignement #7

Sous réserve que les économies aient la même fonction de production, le même taux d'épargne et le même taux de croissance de la population (et le même taux de dépréciation) alors :

Les économies les plus pauvres devraient croître plus rapidement que les économies les plus riches.

Plus une économie se rapproche de son ES plus sont taux de croissance sera faible. Il ne faut donc pas s'étonner que la France connaisse un taux de croissance plus faible maintenant que pendant les 30 glorieuses où elle était moins riche.

Nous reviendrons plus longuement sur le processus de convergence.

La productivité marginale du capital

Lors du processus de convergence vers l'ES (que l'on nomme dynamique transitoire), on se demande comment évolue la rémunération du capital, la Pmk ?

Puisqu'une dérivée est une variation infinitésimale, on déduit que $PmK = Pmk$. que l'on fasse varier trés peu le stock de capital ou le capital par tête revient au même.
On sait que :

$$R_t = Pmk_t = \frac{\partial y_t}{\partial k_t}$$

Le rendement net de la dépréciation est :

$$r_t = R_t - \delta$$

Visualisation de la Pmk

Comme la Pmk est la dérivée de la production par tête par rapport au capital par tête, graphiquement elle est représentée par la pente de la tangente de la fonction de production par tête.

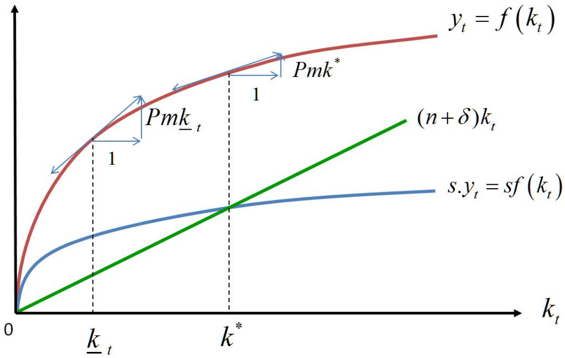

FIGURE – Visualisation de la Pmk_t

Enseignement #8

La rémunération du capital est d'autant plus élevé que le capital par tête est faible.

On comprend bien que le capital devrait être mieux rémunéré dans les pays pauvres que dans les pays riches, **créant une incitation à la mobilité du capital des pays riche vers les pays pauvres.**

La productivité marginale du travail

Lors du processus de convergence vers l'ES, on se demande comment évolue la rémunération du capital : le taux de salaire.
On sait que :

$$Y_t = PmK_tK_t + PmL_t.L_t \qquad soit \qquad y_t = Pmk_tk_t + PmL_t$$

D'où :

$$w_t = y_t - Pmk_tk_t$$

Visualisation du taux de salaire

Puisque le taux de salaire est la différence entre la production par tête y_t et la rémunération du capital par tête $Pmk_t k_t$, on peut représenter le taux de salaire sur l'axe des abscisses comme çi dessous :

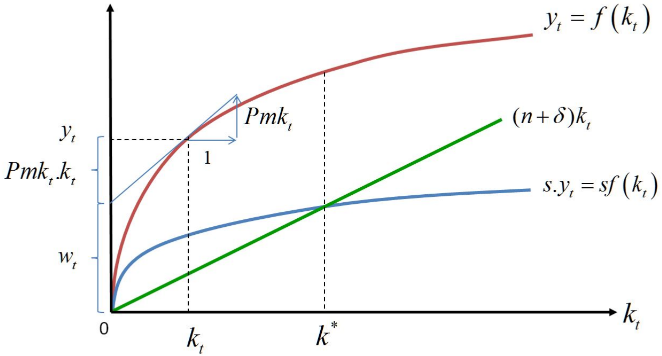

FIGURE – Visualisation de w_t

Enseignement#9

La rémunération du travail est d'autant plus faible que le capital par tête est faible.

On comprend bien que l'unité élémentaire de travail est mieux rémunéré dans les pays riches que dans les pays pauvres, **créant une incitation à la mobilité du travail des pays pauvres vers les pays riches (migrations).**

Conclusion

La version simple du modèle de Solow [1954] nous apprend que :

- L'investissement n'est pas "moteur" durable de la croissance.
- La croissance n'existe qu'en dynamique transitoire.
- Il existe un État Stationnaire
- Les rémunérations des facteurs de production évoluent au cours de la dynamique transitoire.
- Il existe des incitations fortes aux déplacements des facteurs de production entre les pays qui n'ont pas le même niveau de développement.