الفصل الثالث : "استيفاء كثير حدود"
"Polynomial Interpolation"

1- مقدمة :

- إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ معروفة فقط في $(n+1)$ نقطة من الشكل $(x_i, f(x_i))$ حيث $i=0,\dots,n$ ، هل يمكن إنشاء تقريب لـ $f(x)$ من أجل كل x.

- النقاط $(x_i, f(x_i))$ تسمى نقاط الاستيفاء قد تأتي من نتائج تجريبية أو من جدول.

تعريف :

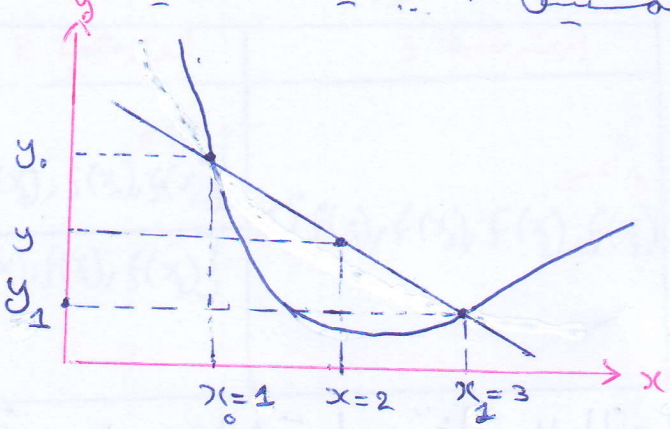
لتكن f دالة حقيقية معرفة على المجال $[a,b]$ تحتوي على $(n+1)$ نقطة $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. نقول أن P_n يستوفي f في النقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ حيث : $P_n(x_i) = f(x_i), i=0,\dots,n$

ليكن P_n كثير حدود درجته أقل أو تساوي n.

2. الطرق المستعملة : "Lagrange Polynomial"

2.1 كثير حدود لاغرونج :

لتمثيل البياني التالي لدالة كيفية $f(x)$:



ونعلم أن $f(1) = 3,716$ و $f(3) = 1,623$

ونريد حساب $f(2)$:

$$\frac{y_0 - y}{x_0 - x} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$ تسمح لنا بكتابة : حضائص المستقيم في المجال $[a,b]$

y هي القيمة التقريبية لـ $f(2)$:

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

هذه الصيغة تسمى بكثير حدود لاغرونج

الصيغة العامة:

نسمي بإستفاء x عنصر من كل كثير حدود L_i معرف من أجل $i=0,\dots,n$

بالعلاقة:
$$L_i(x) = \prod_{i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}$$

إذا أخذنا $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$ إذن $P_n(x) = f(x_i)$

مثال 1.2: لدينا:
$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$$
$$f(x_0) = -4 \ ; \ f(x_1) = 2 \ ; \ f(x_2) = 2$$

أحسب كثير حدود x عنصر

الحل:

تقدير الخطأ:

يمكن كتابة عبارة الخطأ الناتج عن محاولة استفاء الدالة $f(x)$ عن طريق كثير حدود $P_n(x)$ عنصر بإستعمال $(n+1)$ نقطة على الشكل التالي:
$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

حيث $M = \max |f^{(n+1)}(\xi)|$ ، $\xi \in [x_0 ; x_n]$

2.2 كثير حدود نيوتن (Newton Polynomial)

سمي بإستقاء نيوتن كل كثير حدود $P_n(x)$ معرف كما يلي:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

الجانب المثير للاهتمام لهذه الصيغة يظهر عندما تريد ايجاد المعاملات c_i (عددهم $(n+1)$)، بحيث يكون $P_n(x)$ يمر بكل $(n+1)$ نقطة لإستقاء $(x_i, f(x_i))$

2.2.1 حساب المعاملات c_i

من أجل حساب هذه المعاملات، نستعمل "الفروق المقسومة" "Divided differences". نعرف الفروق المقسومة ذات الترتيب n للدالة f في النقطة x_i كما يلي:

$$c_0 = \delta[f(x_0)] = f(x_0)$$

$$c_1 = \delta[f(x_0), f(x_1)] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$c_i = \delta[f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_i)] = \frac{\delta[f(x_1), \dots, f(x_i)] - \delta[f(x_0), \dots, f(x_{i-1})]}{x_i - x_0}$$

من أجل $n \geq 2$

من أجل حساب الفروق المقسومة يمكننا انشاء الجدول التالي:

i	x_i	$f(x_i)$	الترتيب 1	الترتيب 2	الترتيب 3
0	x_0	$f(x_0)$ ← c_0	$\delta[f(x_0), f(x_1)]$ ← c_1	$\delta[f(x_0), f(x_1), f(x_2)]$ ← c_2	$\delta[f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3)]$ ← c_3
1	x_1	$f(x_1)$	$\delta[f(x_1), f(x_2)]$	$\delta[f(x_1), f(x_2), f(x_3)]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$\delta[f(x_2), f(x_3)]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

مثال 2.2: أوجد كثير حدود نيوتن الذي يمر بالنقاط التالية:

$$x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=0$$

$$f(x_0)=1,\ f(x_1)=4,\ f(x_2)=8,\ f(x_3)=14$$

الحل:

2.2.2 تقدير الخطأ:

يمكننا كتابة عبارة الخطأ الناتج عن استعاض الدالة $f(x)$ عن $P_n(x)$ و $(n+1)$ نقطة بالعبارة:

ضربا كثير حدود نيوتن

$$|f(x) - P_n(x)| \leq |c_n| \cdot \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$