

Matière : *Algèbre 4*
Responsable : *Y. Halim*

SÉRIE DE TD N° 2

Exercice 1 :

Montrer que les applications suivantes sont des formes bilinéaires, Sont-t-elles symétriques, anti-symétriques ?

1.

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \int_0^2 x^2 P(x) Q'(x) dx\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \text{Tr}(AB)\end{aligned}$$

Exercice 2 :

Soit Ψ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \int_0^1 P(x) Q(1-x) dx\end{aligned}$$

1. Montrer que Ψ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice de Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que Ψ est non dégénérée.

Exercice 3 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Justifier que la matrice A est symétrique.
2. Déterminer la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique est la matrice A .
3. Déterminer la forme quadratique associée.

Exercice 4 :

Soient les formes bilinéaires suivantes

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - 4x_2 y_1 - 4x_1 y_2$$

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto 3x_1 y_1 - 5x_2 y_2 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 3x_2 y_3 + 3y_2 x_3$$

1. Montrer que f et g sont symétriques.
2. Déterminer la forme quadratique associée à chaque forme bilinéaire.

Exercice 5 : (Examen 2023)

Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 - 5x_2 y_2$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer $\text{Ann}(f)$ le noyau de f . Déduire si f est non dégénérée.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1 = (1, 1), \varepsilon_2 = (1, -3)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit l'ensemble

$$F = \langle (2, 1) \rangle$$

Déterminer $F^\perp$ l'orthogonal de F .

Références bibliographiques :

1. Exercices corrigés d'algèbre linéaire, **Tom 2**, 510/27.
2. Dualité, formes quadratiques, formes hermitiennes : exercices corrigés avec rappels de cours, 510/12.
3. Algèbre linéaire et bilinéaire, 510/516.
4. Algèbre et géométrie, 2 année, 510/1058.
5. Algèbre linéaire : Cours et exercices corrigés 510/24.
6. Algèbre, exercices et problèmes, 510/420.