CHAPITRE III

EQUATION D'EULER /L'EQUATION DE CONSERVATION DE L'ENERGIE

1. Les lois de Conservation :

- De la masse (équation de continuité): $\dot{m} = \rho_1 c_1 A_{1n} = \rho_2 c_2 A_{2n}$
- Du quantile de mouvement $\vec{Q}_M = m_1 \vec{c}_1 = m_2 \vec{c}_2$
- Du moment angulaire $M = \dot{m}(C_{2u} r_2 - C_{1u} r_1)$
- Conservation d'énergie (1ere loi de la thermodynamique) $\dot{W} = M\omega = \dot{m}(c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1)$

1.2 Conservation de l'énergie

L'équation de l'énergie avec q=0, S=0

$$-\dot{W} = \dot{m}\left[\left(e_{\text{int}\,2} + \frac{c_2^2}{2} + g_2 z_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) - \left(e_{\text{int}\,1} + \frac{c_1^2}{2} + g_1 z_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right)\right]$$

L'enthalpie du fluide $h = e_{\text{int}} + pV$

$$h_2 = e_{\text{int}\,2} + \frac{p_2}{\rho_2} \qquad h_1 = e_{\text{int}\,1} + \frac{p_1}{\rho_1}$$ Avec $e_{\text{int } i}$: Energie interne

Enthalpie totale ou de stagnation (d'arrêt)

$$h_{02} = h_2 + \frac{c_2^2}{2} + gz_2 \qquad h_{01} = h_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1$$

En plus, au niveau du rotor on peut considérer que la variation de l'énergie potentielle est négligeable par rapport aux autres formes d'énergie (cinétique, de pression et interne). Ainsi,

$h_{02} = h_2 + \frac{c_2^2}{2}$ $h_{01} = h_1 + \frac{c_1^2}{2}$ L'équation de l'énergie prend la forme répandue :

$$-\dot{W} = \dot{m}(h_{02} - h_{01})$$

Finalement, si on confronte cette équation par unité de masse avec (la convention de signe pour le travail est l'opposé), on trouve la relation suivante utilisée pour les turbines à gaz et à vapeur :

$$\underbrace{(h_{02} - h_{01})}_{\text{Conservation d'énergie}} \underbrace{=}_{\Leftrightarrow} \underbrace{(c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1)}_{\text{équation d'Euler}}$$

1.3 Transfert d'énergie

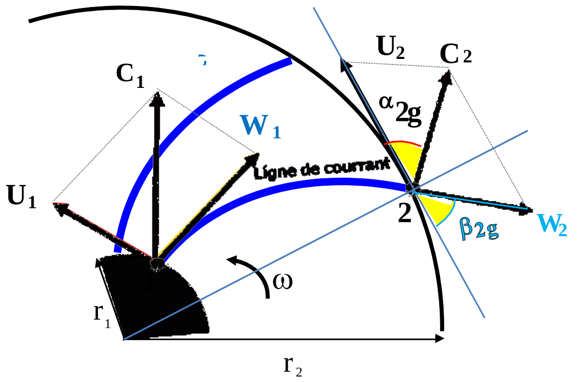
Dans les machines hydrauliques et pneumatique, le travail spécifique idéal (we) est décrit par équation d'Euler :

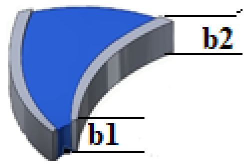
$$w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} \qquad w_e = c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1 = (h_{02} - h_{01}) \qquad w_e = (h_{02} - h_{01}) = (h_2 - h_1) + \frac{(c_2^2 - c_1^2)}{2}$$

Cette expression peut être exprimée différemment à l'aide de la relation trigonométrique des cosinus appliquée au triangle de vitesses :

Équation de transfert d'énergie / équation d'énergie d'Euler

1. Le volume de contrôle considéré inclut tous les passages de l'aube responsables du transfert d'énergie.
2. Les débits massiques entrant et sortant du volume de contrôle sont égaux et sont donnés par $\dot{m} = \rho Q$
3. Il est supposé que la vitesse c est uniforme d'un aube à l'autre.



Conservation du moment cinétique : le taux de changement du moment cinétique est égal au couple appliqué

Le couple (M)

$M = \dot{m}(L_2 \text{ x } v_2 - L_1 \text{ x } v_1) \quad L_i = r_i \cos\alpha_i \qquad i = 1,2$

$$M = \dot{m}\left(c_2 r_2 \cos\alpha_2 - c_1 r_1 \cos\alpha_1\right)$$

$$= \dot{m}\left(\underbrace{c_2 \cos\alpha_2}_{c_{u2}} r_2 - \underbrace{c_1 \cos\alpha_1}_{c_{u1}} r_1\right)$$

$$= \dot{m}\left(c_{u2} r_2 - c_{u1} r_1\right)$$

La vitesse linéaire

$u_i = r_i \omega$ (i = 1,2).

La puissance

$\dot{W} = M\omega = \dot{m}\left(c_{2u} r_2 - c_{1u} r_1\right)\omega = \dot{m}\left(c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1\right)$

Le travail spécifique

$$w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = \left(c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1\right)$$

Discussion sur l'équation énergétique d'Euler

- Le travail spécifique est indépendant de la densité du fluide. Ainsi, pour une roue donnée tournant à une vitesse donnée, le travail spécifique sera le même pour un gaz ou un liquide, si les effets de viscosité sont négligés.
- Des vitesses non uniformes sont visibles à l'extrémité de la sortie, même si l'écoulement peut être uniforme à l'entrée.

  Cas spéciaux: $w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = \left(c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1\right)$

  - Pour machine à flux axial. $u = u_1 = u_2 \quad w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = u\left(c_{2u} - c_{1u}\right)$
  - Si $C_{1u} = 0$ et $\beta_2 = 90°$ $w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = \left(c_{2u} u_2\right) = u_2^2$

- Si les changements de densité sont négligeables, alors : $w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = \frac{(p_2 - p_1)}{\rho}$
- Ainsi, un gaz manipulant une turbine nécessitera un travail spécifique plus important pour les mêmes variations de pression dans un liquide.
- Ainsi, les tailles seront plus grandes et / ou la vitesse de rotation sera plus élevée.
- En raison de fortes contraintes, les volutes des compresseurs d'air sont généralement en acier épais plaques d'épaisseur croissante vers le moyeu. Mais la volute dans une pompe est généralement en fonte.

Composants du transfert d'énergie

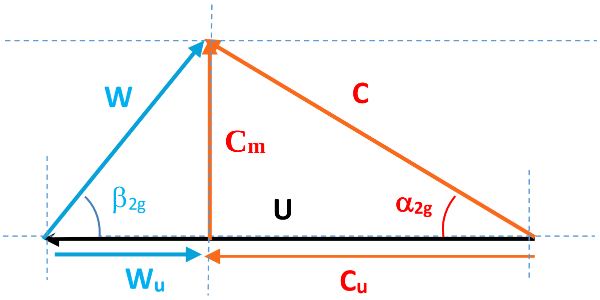


Fig. 4.14: Exemple 4.1

$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\left(\hat{\beta}\right)$

$c^2 + u^2 - 2u \underbrace{c\cos\bar{\alpha}}_{c_u} = w^2$ Avec $\bar{\alpha} = \alpha_g$ angle entre c et u c.à.d. par rapport à la direction tangentiel

Cette relation est exprimée entre l'entrée **1** et la sortie **2** par les équations suivantes :

$$-\begin{cases} w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2u_2 \underbrace{c_2\cos\bar{\alpha}_2}_{c_{2u}} \\ w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2u_1 \underbrace{c_1\cos\bar{\alpha}_1}_{c_{1u}} \end{cases}$$

$$w_2^2 - w_1^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2u_2 \underbrace{c_2\cos\bar{\alpha}_2}_{c_{2u}} - c_1^2 - u_1^2 + 2u_1 \underbrace{c_1\cos\bar{\alpha}_1}_{c_{1u}}$$

$$u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u} = \frac{\left(c_2^2 - c_1^2\right) + \left(u_2^2 - u_1^2\right) + \left(w_1^2 - w_2^2\right)}{2}$$

Le travail spécifique (l'énergie transmise par unité de masse)

$$w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = \left(c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1\right)$$ Équation d'Euler

En hydraulique en utilise l'énergie spécifique w_e par unité de poids, $\dot{m}g$

$gH = c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1$

$$w_e = \underbrace{\frac{\left(c_2^2 - c_1^2 \right)}{2}}_{I} + \underbrace{\frac{\left(u_2^2 - u_1^2 \right)}{2}}_{II} + \underbrace{\frac{\left(w_1^2 - w_2^2 \right)}{2}}_{III}$$

Explication des termes :

I) Le premier terme indique la variation d'énergie cinétique du fluide lors de son passage dans le rotor.

II) Le deuxième peut être interprétée comme la variation d'énergie due aux forces centrifuges C'est le changement dû au mouvement du fluide en rotation d'un rayon $\mathbf{r_1}$ à un autre $\mathbf{r_2}$.

III) Le troisième, la diminution d'énergie cinétique relative qui est transformée en un gain de 'hauteur statique'.

De l'équation 3 et 5 en peut avoir

$$(h_2 - h_1) + \cancel{\frac{\left(c_2^2 - c_1^2\right)}{2}} = \cancel{\frac{\left(c_2^2 - c_1^2 \right)}{2}} + \frac{\left(u_2^2 - u_1^2 \right)}{2} + \frac{\left(w_1^2 - w_2^2 \right)}{2}$$

La variation de l'enthalpie

$$(h_2 - h_1) = \frac{\left(u_2^2 - u_1^2 \right)}{2} + \frac{\left(w_1^2 - w_2^2 \right)}{2}$$

Pour une machine a fluide incompressible la variation de pression est :

$$\frac{(p_2 - p_1)}{\rho} = \underbrace{\frac{\left(U_2^2 - U_1^2 \right)}{2}}_{II} + \underbrace{\frac{\left(w_1^2 - w_2^2 \right)}{2}}_{III}$$

Les termes **(II)** et **(III)** expliquent ensemble **l'augmentation de la pression statique** à l'intérieur de la roue.

Machine radiale

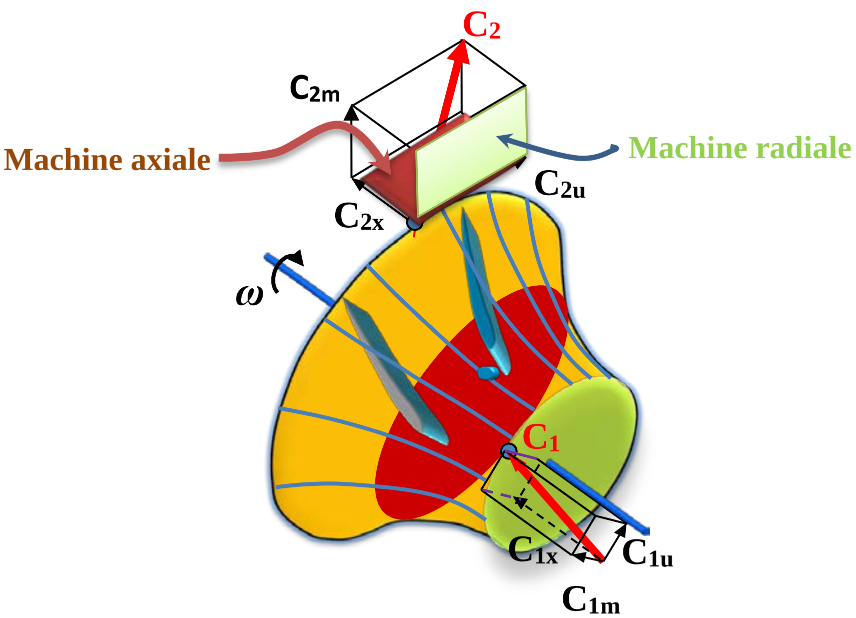
Introduction

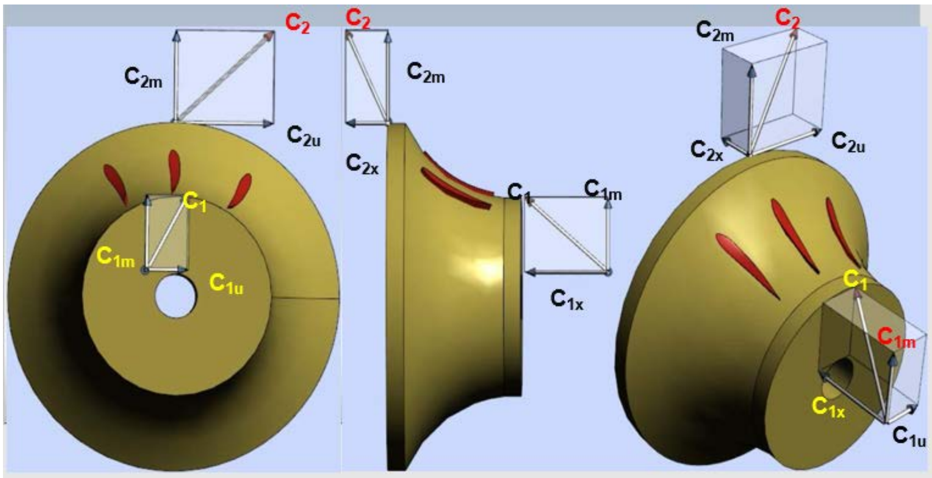
Dans les machines radiales, l'écoulement a lieu dans un plan normal à l'axe de rotation.

Pour les pompes et les compresseurs (soufflantes) cet écoulement s'établie à partir de l'œil du rotor vers la périphérie, tandis que pour les turbines, le fluide pénétré par la périphérie et sort par le centre.

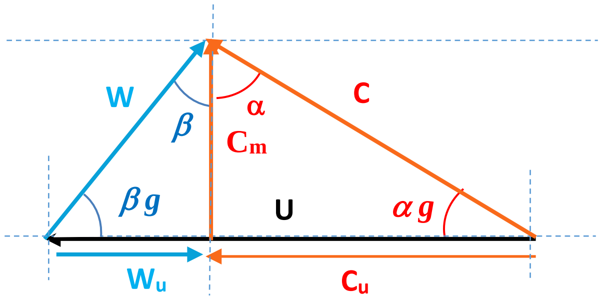
.

La figure suivant illustre que pour les machines radiales le triangle de vitesses dans le rotor et le diffuseur se trouve sur le plan radial, tandis que pour les machines axiales l'étage et le triangle de vitesses se trouve sur le plan axial





Le triangle de vitesse



Le triangle des vitesses d'une machine radiale et les composants (Tangentielle, radiale)

Nomenclature

C Vitesse absolue de l'écoulement

W Vitesse relative de l'écoulement

U Vitesse périphérique du rotor

C_u , C_m, C_x Composante tangentielle, radiale et axiale de la **vitesse absolue du fluide**

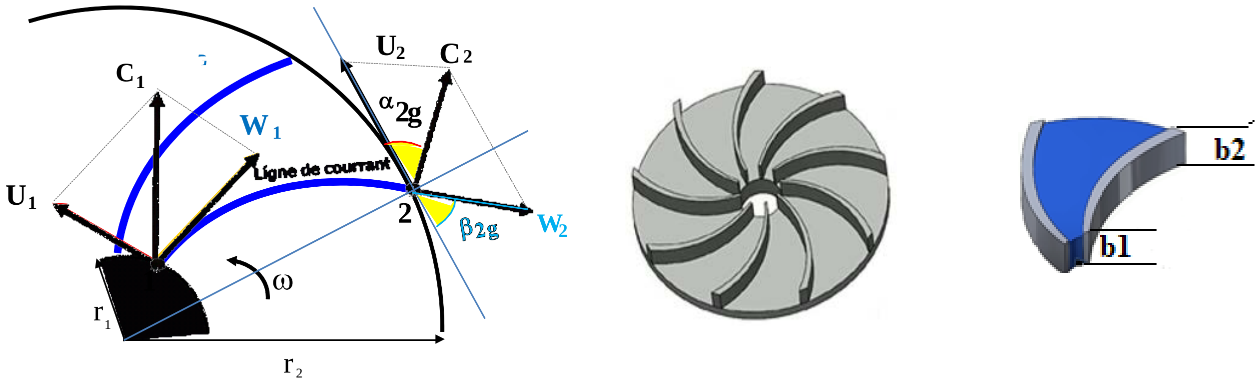
W_u , W_m, W_x Composante tangentielle, radiale et axiale de la **vitesse relative du fluide**

β mesurée par rapport à **la direction radiale** dans le sens contraire à la rotation.

β_g : est mesurée par rapport la **direction tangentielle**.

β_g correspond au complément de β, $\bar{\beta}_i + \beta_i = 90°$ ou bien $\beta_{ig} + \beta_i = 90°$

La figure suivante montre Les triangles de vitesse à l'entrée **1** et à la sortie **2** dans une machine radiale

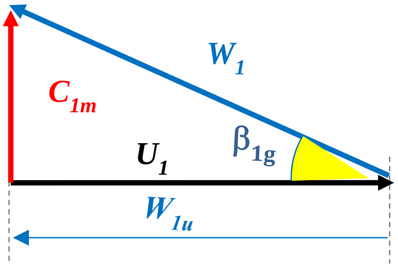


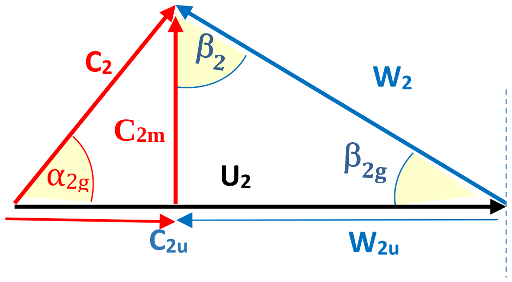
D'après l'équation d'Euler appliqué à un fluide incompressible nous avons :

$$gH_t = u_2 \times c_{2u} - u_1 \times c_{1u} \quad \text{Avec} \quad c_{1u} = 0$$

$$H_{ideal} = \frac{c_{2u} u_2}{g} \qquad (c_{1u} = 0)$$

Le triangle de vitesse à l'entée 1 et à la sortie **2** devient





$$c_{2u} = (u_2 - w_{2u}) = (u_2 - c_{2m} tan\beta_2)$$

$$c_{2u} = (u_2 - c_{2m} tan\beta_2)$$

$$Q = 2\pi r_2 b_2 c_{2m} \qquad \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} = c_{2m}$$

$$H_i = \frac{u_2}{g}\left(u_2 - \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} tan\beta_2\right)$$

$$H_t = A - BQ\tan\beta_2$$

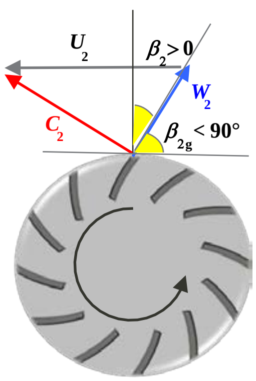
$$A = \frac{u_2^2}{g} = cte \quad \text{et} \quad B = \frac{u_2}{2\pi r_2 b_2 g} = cte$$

$$H_t = \frac{u_2^2}{g} - \frac{\omega}{2\pi b_2 g}\tan\beta_2.Q = A - B \times \tan\beta_2.Q$$

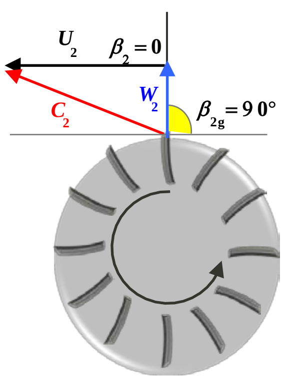
L'inclinaison des pales

Le comportement d'une machine radiale est nettement affecté par l'angle physique (ou de construction) β_{2g} à la sortie des aubes. Pour un compresseur radial, les profils peuvent être :

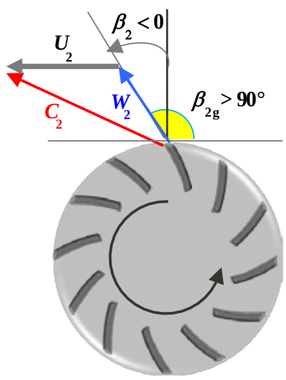
- Courbés en arrière ($\beta_{2g} < 90°$ ou $\beta_2 > 0°$) ; fournissent les meilleurs rendements.
- Radiales ($\beta_{2g} = 90°$ ou $\beta_2 = 0°$) ; idéales du point de vue de la résistance mécanique.
- Courbées en avant ($\beta_{2g} > 90°$ ou $\beta_2 < 0°$) ; employés pour des grands débits.



Courbées en arrière



Radiales

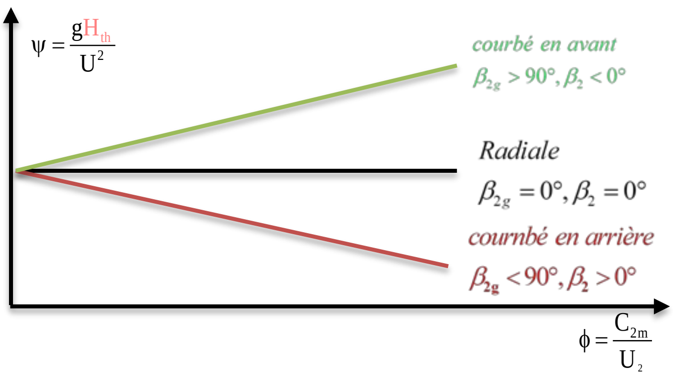


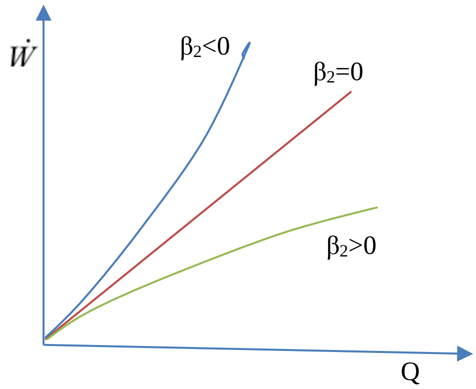
Courbées en avant

Paramètre de conception d'une machine radial (approche classique)

Trois quantités fondamentales sent utilisées dans la conception des machines hydraulique pneumatique :

- **Le coefficient de charge ψ** : $\psi = \frac{w_e}{u^2} = \frac{gH_t}{u^2}$
- **Le coefficient de débit Φ** : $\phi = \frac{c_{x,m}}{u} = \frac{\dot{m}/\rho A}{ND/2} = \frac{Q}{nD^3}$





- **Le degré de réaction R**
  - L'énergie totale correspond à la somme des composantes statiques et dynamiques et la proportion relative de chacune d'elles varie avec la conception.
  - Le degré de réaction peut être défini de différentes manières.
    - Ratio du transfert d'énergie dû à la réaction au transfert d'énergie total :
      $R = \frac{h_2 - h_1}{h_{02} - h_{01}}$
    - Rapport entre le changement de pression statique à travers le rotor et le changement de pression de stagnation dans l'étage

$$R = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(u_2^2 - u_1^2\right) + \left(w_1^2 - w_2^2\right)\right]}{w} \begin{cases} R = \dfrac{\left[\left(u_2^2 - u_1^2\right) + \left(w_1^2 - w_2^2\right)\right]}{\left(u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}\right)} \\ R = \dfrac{\left[\left(u_2^2 - u_1^2\right) + \left(w_1^2 - w_2^2\right)\right]}{\left(c_2^2 - c_1^2\right) + \left(u_2^2 - u_1^2\right) + \left(w_1^2 - w_2^2\right)} \end{cases}$$

- Ainsi, les turbomachines peuvent être classées sur cette base en turbomachines à impulsions et à réactions
  - R=0 Turbine à action, par ex. Pelton turbine, turbine à vapeur à action
  - R=1 Machine à réaction pure : arroseur de gazon

La hauteur théorique ($H_T = \Delta z$) produite par une pompe peut être exprimée par

$$H_t = \underbrace{\frac{c_2^2 - c_1^1}{2g}}_{\ddot{E}_{Cinetique}} + \underbrace{\frac{u_2^2 - u_1^1}{2g} - \frac{w_2^2 - w_1^1}{2g}}_{\ddot{E}_P \ de\ pression} \qquad H_T = H_p + H_v = \frac{\left(p_2 - p_1\right)}{\rho g} + \frac{\left(c_2^2 - c_1^2\right)}{2g}$$

Pour les pompes, le *degré de réaction* caractérise la distribution de ces deux types de Hauteur lors du passage du fluide par le canal inter aube.

$$R=\frac{H_p}{H_t}=1-\frac{H_v}{H_t}$$

Si la vitesse demeure constante, ***H_t=H_p*, *R=1*** et la pompe est dite de ***réaction***.

Par contre, si c'est la pression qui ne change pas, soit, ***H_t=H_v*, *R=0,*** la pompe est dite ***d'action.***

Si on considère l'équation d'Euler pour un rotor avec une vitesse d'entrée

Sans pré rotation (c_{1u}=*0*) on a $H_t=\dfrac{c_{2u}u_2}{g}$

Donc, $R=1-H_v/H_t$ devient : $R=\dfrac{H_p}{H_t}=1-\dfrac{\left(c_2^2-c_1^2\right)}{2c_{2u}u_2}$

et avec l'hypothèse $c_{1m}=c_{2m}=cte$ on trouve:

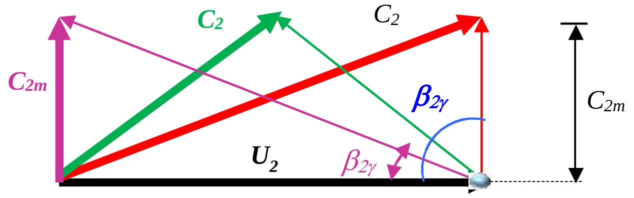
$$\left.\begin{aligned} c_2^2-c_{2u}^2 &= c_{2m}^2 \\ c_1^2-c_{1u}^2 &= c_{1m}^2 \end{aligned}\right\} c_2^2-c_1^2=c_{2u}^2-\cancel{c_{1u}^2}=c_{2u}^2$$

$$R=\frac{H_p}{H_t}=1-\frac{c_{2u}^2}{2u_2c_{2u}}=1-\frac{c_{2u}}{2u_2}$$

S'il n'y a pas de changement de pression statique à travers la roue, la machine est dite à **action**.
S'il y a un changement de pression statique, on l'appelle machine **à réaction.**

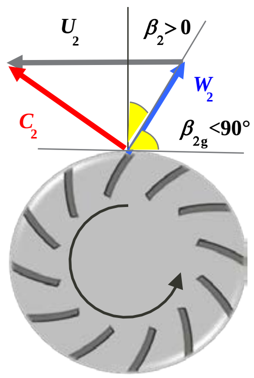
Variation de R avec l'angle β_{2g}

$$R=1-\frac{c_{2u}}{2u_2}$$

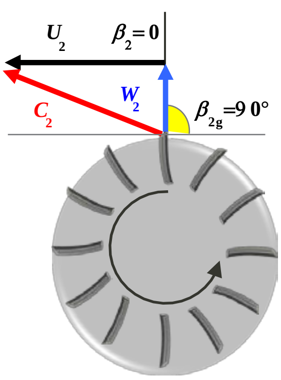


Cette figure illustre pour u_2 =*cte*. Pour une plage limitée la dépendance du degré de réaction $R=f\,(c_{2u})$ avec l'angle d'inclinaison des aubes β_{2g}.

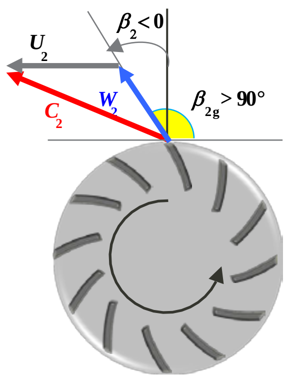
$$R=\left(1-\frac{c_{2m}}{2u_2\tan\beta_{2g}}\right)$$



Courbées en arrière **R<0,5**



Radiales **R=0,5**



Courbées en avant **R>0,5**

Machines Axiales

Les machines P. axiales (turbines à gaz) sont normalement composées de plusieurs étages

Chaque étage comprend un rotor et un stator

Dans un compresseur, le fluide est d'abord accéléré dans le rotor et par la suite décéléré dans le stator.

Dans le stator, l'énergie cinétique gagnée dans le rotor est transformée en pression

Dans une turbine, le fluide à haute énergie est d'abord guidé et accéléré dans le stator.

Par la suite, l'énergie cinétique de l'écoulement est transmise au rotor en même temps qu'un fort changement de direction a lieu.

Ces procès sont répétés pour des étages consécutifs

À cause du mouvement du rotor par rapport au stator, deux types de vitesses, relatives et absolues, seront présentes

L'analyse d'une machine requiert de la connaissance de la vitesse de l'écoulement dans le passage inter-aube. Traditionnellement, cette étude s'effectue à l'aide du diagramme ou triangle de vitesses. Ce concept permet d'obtenir une représentation graphique compacte du champ de l'écoulement étroitement lié à la géométrie des pales. Il s'applique autant aux turbines qu'aux compresseurs. Dans ce chapitre, on regarde spécifiquement les détails du mécanisme de transfert d'énergie de ces deux types de turbomachines pour le cas axial. On rappelle que pour les turbomachines axiales, l'écoulement est principalement parallèle à l'axe de la machine, c'est-à-dire qu'il ne possède que très peu de vitesse radiale. Par contre, la vitesse tangentielle (de rotation autour de l'axe) peut être appréciable.

3.1 Les triangles de vitesse

Les machines axiales opèrent, en des termes relatifs, avec un grand débit et une faible variation énergétique du fluide. En général elles disposent d'une ou plusieurs ensembles de couronnes d'aubes fixes et mobiles. Une couronne d'aubes fixes reçoit le nom de stator et celle d'aubes mobiles est appelée le rotor. L'ensemble roto-stator est connu sous le nom d'étage. Généralement, les machines qui fonctionnent avec des écoulements incompressibles (des liquides et ou des gaz à faible vitesse) ont un seul étage tandis que celles qui opèrent avec des écoulements compressibles ont des étages multiples

L'étude classique des turbomachines axiales considère un écoulement bidimensionnel moyen à un rayon situé à mi-chemin entre le moyeu et le carter. Cet écoulement est assumé comme étant représentatif pour tout l'étage. Par la suite, ou construit un diagramme vectoriel en fonction de la vitesse de rotation et des vitesses relative et absolue de l'écoulement à l'entrée et à la sortie du stator et du rotor. Cet agencement, représenté aux figures 3.1 et 3.2 pour les cas d'une turbine et d'un compresseur respectivement, est nommée le triangle de vitesses.

On remarque que la vitesse absolue d'écoulement est celle vue par un observateur fixe tandis que la vitesse relative est celle perçue par un observateur en mouvement avec le rotor. Aussi, ou note que la composante axiale de la vitesse ne change pas entre l'entrée et la sortie de l'étage.

Nomenclature et convention de signes

Habituellement, pour les turbines l'étage est composé d'un stator et d'un rotor, dans cet ordre. Ainsi, on note le point d'entrée du fluide dans le stator avec l'indice 1, le point d'entrée du rotor, correspondant avec la sortie du stator, avec l'indice 2, et finalement la sortie du rotor avec l'indice 3. Cependant, pour les compresseurs l'étage est constitué d'un rotor suivi d'un stator. Dans ce cas, l'entrée du rotor est notée par l'indice 1 et la sortie par l'indice 2. Compte tenu que le domaine des turbomachines est assez vaste, la nomenclature varie légèrement d'un type d'application à une autre. Dans ces notes, les symboles utilisés pour l'étude des turbomachines sont :

$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W}$

C : vitesse absolue de l'écoulement

W : vitesse relative de l'écoulement

U : vitesse périphérique du rotor

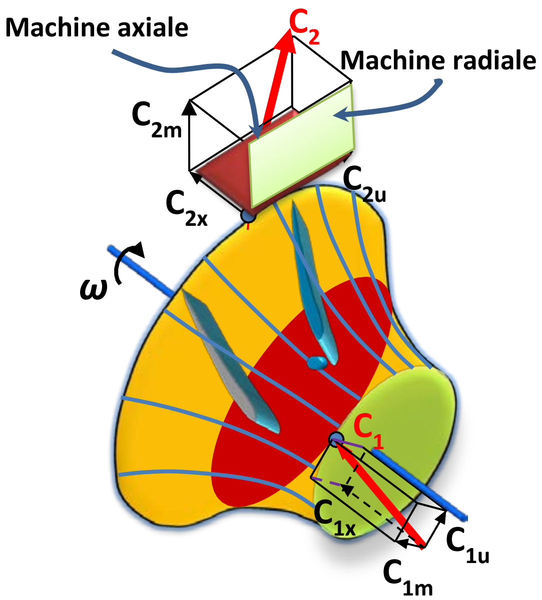
C_u, C_m et C_x : composantes tangentielles, radiales et axiales de la vitesse absolue.

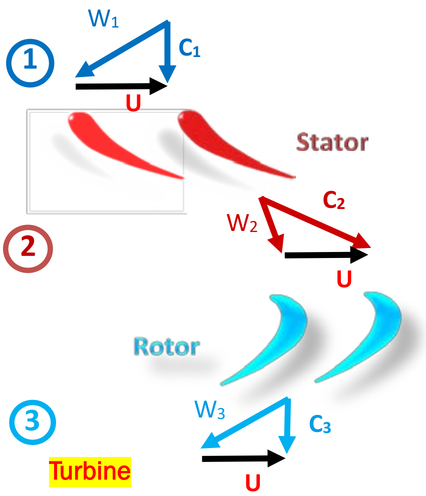
W_u, W_m et W_x : composantes tangentielles, radiales et axiales de la vitesse relative

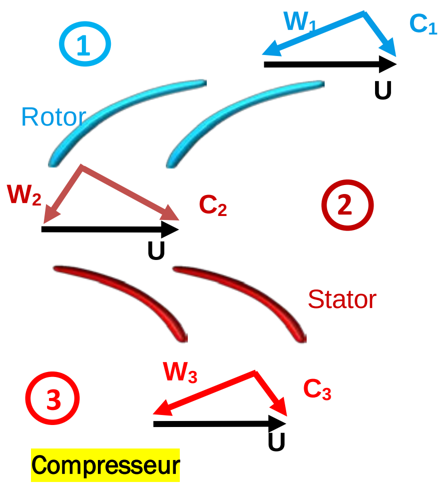
α : angles des vitesses absolues

β : angles des vitesses relatives.

Les angles de l'écoulement α et β sont mesurés par rapport à la direction axiale. La forme des pales du rotor est donnée par les angles β, c'est-à-dire Par les vitesses dans le repère relatif au rotor. D'autre part, la forme des pales du stator est donnée par les angles α, c'est-à-dire par les vitesses dans le repère absolu, celui des stators.







Le triangle normal

Quoique la vitesse axiale ainsi que la vitesse périphérique du rotor peuvent varier entre l'entrée et la sortie du rotor, dans la plupart des cas d'analyse des turbomachines axiales on assumera que la vitesse périphérique du rotor demeure constante et que la composante axiale de la vitesse reste aussi constante entre l'entrée et la sortie des aubages. Cette hypothèse est valable si les changements d'aire et de masse volumique entre l'entrée et la sortie sont petits, ou bien si $\rho A = cte$, puisque dans l'expression $\dot{m} = \rho_1 c_{1x} A_1 = \rho_2 c_{2x} A_2$ les termes en ρ et A, s'annulent. Donc : $c_{1x} = c_{2x} = c_x = cte$

Aussi, pour une machine axiale avec $U_3 = U_2 = U = cte$, l'équation (2.12) devient :

$-W_e = U\left(c_{3u} - c_{2u}\right)$ 3.1

Cette équation simplifiée indique que pour une *turbine*, avec $c_{3u} \le c_{2u}$, $W_e > 0$ tandis que pour un *compresseur*, où $c_{3u} \ge c_{2u}$, $W_e < 0$.

Étant donné que la vitesse périphérique est considérée comme une constante, le triangle de vitesse à l'entrée (noté par l'indice 2) et à la sortie (avec l'indice 3) du rotor d'un étage peut être superposés et aussi ajouter la forme approximative des pales. Cette configuration, illustrée sur la figure 3.3 reçoit le nom *de triangle normal de vitesse* et l'étage correspondant stator-rotor, est appelé étage normal. Il s'agit d'un étage répétitif pour lequel

$$c_3 = c_2 \qquad \alpha_3 = \alpha_1 \qquad U = cte \qquad c_x = cte$$

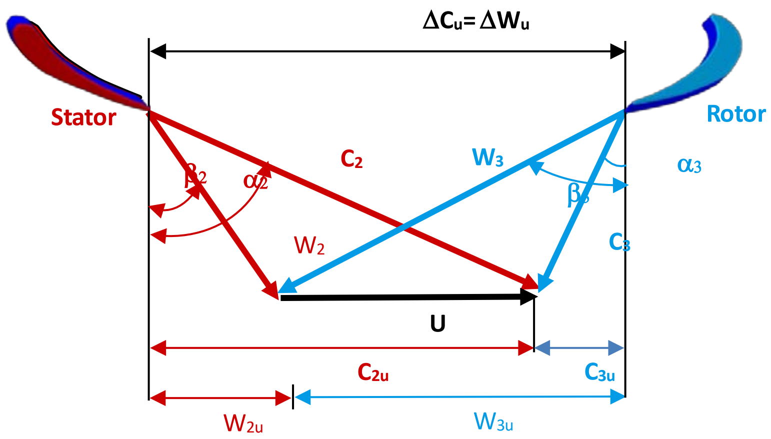
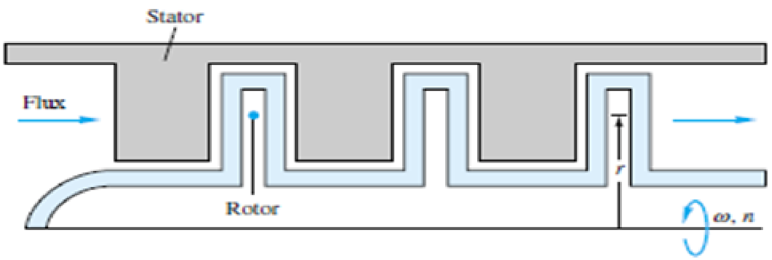
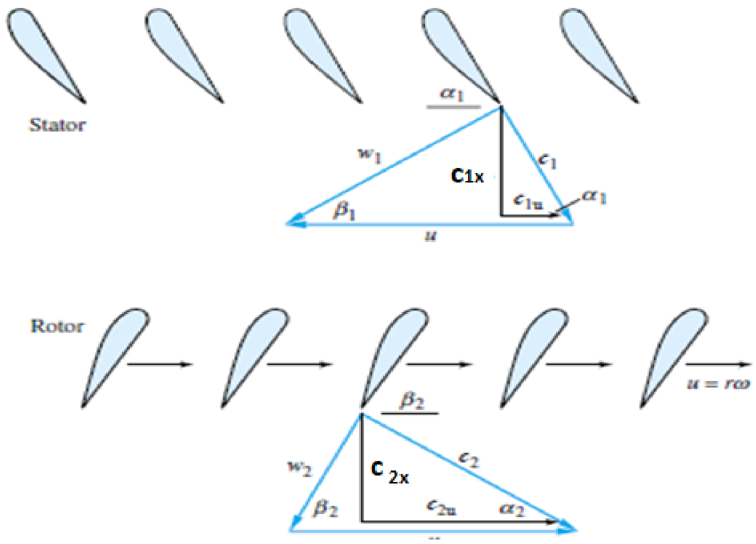


Fig 3.3 : Triangle normal (turbine)





$$\vec{w}_1 = \vec{c}_1 - \vec{u} \qquad c_{1x} = c_{2x} = c_x \qquad \tan\alpha_1 = \frac{c_{1u}}{c_x} \qquad \tan\beta_1 = \frac{w_{1u}}{c_x} \qquad c_{1u} + w_{1u} = u$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\alpha_1 + \tan\beta_1 &= \frac{u}{c_x} \\ \tan\alpha_2 + \tan\beta_2 &= \frac{u}{c_x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\alpha_1 + \tan\beta_1 = \tan\alpha_2 + \tan\beta_2$$

$$\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2 = \tan\beta_2 - \tan\beta_1$$

$$w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = \left(c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1\right) \text{ Équation d'Euler}$$

$$u_1 = u_2 = u \quad w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = u\left(c_{2u} - c_{1u}\right)$$

$$\tan\alpha_1 + \tan\beta_1 = \frac{u}{c_x} \Rightarrow \tan\beta_1 = \frac{u}{c_x} - \tan\alpha_1$$

$$\begin{aligned} w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} &= uc_x\left(\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1\right) \\ &= uc_x\left(\tan\beta_1 - \tan\beta_2\right) \\ &= uc_x\left(\frac{u}{c_x} - \tan\alpha_1 - \tan\beta_2\right) = u\left(u - c_x\left(\tan\alpha_1 + \tan\beta_2\right)\right) \end{aligned}$$

$$w_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = uc_x\left(\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1\right) \text{ incompressible}$$

$$\mathrm{c}_p\left(T_{02} - T_{01}\right) = uc_x\left(\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1\right) \text{ compressible}$$