الفصل الثاني: "حل المعادلات الغير خطية"

1- مقدمة

معظم المشاكل التي تطرح عند حل المعادلات الغير خطية $f(x)=0$ خاصة اذا كانت f كثير حدود درجته أكبر من 3 أو f دالة مركبة، لا نستطيع حلها بالطرق الكلاسيكية لذلك نلجأ لتقنيات أخرى تسمى بالطرق العددية (Methodes numériques)، من بين الطرق التي سندرسها هي: طريقة التنصيف، التقريبات المتعاقبة، نيوتن-رافسون.

2- مواقع الجذور

أغلب الطرق العددية تتطلب تحديد المجال $[a,b]$ الذي يحتوي على جذر وحيد يسمى بالجذر المنفصل α الخاص بـ: $f(x)=0$

نظرية 2.1 (نظرية القيم المتوسطة)

لتكن f دالة مستمرة ومعرفة على المجال $[a,b]$:

* اذا كان $f(a)\cdot f(b)<0$، يوجد على الأقل عدد حقيقي $c\in[a,b]$ حيث $f(c)=0$
* اذا كانت أيضا f رتيبة فالحل c وحيد. ($f'(x)\neq 0$ مجال $\forall x\in[a,b]$)

ملاحظة: لإيجاد المجال $[a,b]$ الذي تحقق الشرطين السابقين نستعمل الطريقة البيانية، بحيث نرسم منحنى $f(x)$ ونختار المجال $[a,b]$ بحيث يشمل فاصلة النقطة التي يتقاطع فيها البيان مع محور الفواصل. أو يمكننا كتابة الدالة $f(x)$ على الشكل $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$، بحيث تكون f_1 و f_2 على أبسط شكل ممكن، ونختار المجال $[a,b]$ بحيث يشمل فاصلة نقطة تقاطع منحنى f_1 مع منحنى f_2.

3. طريقة التنصيف (Methode de dichotomie (bissection))

بعد عملية العزل للجذر في مجال محدد $[a,b]$، نقوم بتنصيف المجال باعتبار النقطة $x_0=\frac{a+b}{2}$ لنحصل على حالتين:

الحالة الأولى: اذا كان $f(x_0)=0$ / اذن $\alpha = x_0$

الحالة الثانية: اذا كان $f(x_0)\neq 0$ / اذن الجذر α يوجد في احد المجالين $[a,x_0]$ و $[x_0,b]$ حيث:

* اذا كان $f(a)\cdot f(x_0)<0$ فإن $\alpha\in[a,x_0]$ ، فيصبح المجال الجديد $[a_1,b_1]$
* " " $f(x_0)\cdot f(b)<0$ " " $\alpha\in[x_0,b]$ ، " " " " $[a_1,b_1]$

- نعيد عملية التنصيف بإعتبار نقطة أخرى $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ لنحصل على حالتين:

الحالة الأولى: اذا كان $f(x_1)=0$ ، اذن $\alpha = x_1$

الحالة الثانية: نتبع طريقة الحالة السابقة لحصر α في المجال $[a_2,b_2]$ الذي بعتبر طوله نصف طول المجال $[a_1,b_1]$ وطول هذا الأخير هو نصف طول المجال $[a,b]$. ومن خلال تكرار العملية نحصل على متتالية نقاط:

$x_0=\frac{a+b}{2}$ ، $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ ، ... ، x_n ، $x_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$

في الأخير نأخذ x_n كقيمة تقريبية للجذر α باستعمال $(n$ تكرار$)$ وبمعرفة n نحسب عدد التكرار اللازم (n) لعملية ما، واذا أردنا معرفة عدد التكرار اللازم (n) لعملية ما، بحيث $|\alpha-x_n|\leqslant\varepsilon$ مقدار التقريب ε، حيث

ملاحظة: نتحصل على علاقة n بعد عدة عمليات رياضية بسيطة وتكتب علاقته بالشكل التالي:

$$n\geqslant\frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

مثال: لتكن الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=x-(0,2)\cdot\sin(x)-0,5$

أوجد القيمة التقريبية $(\cdot)$ باستعمال طريقة التنصيف حيث $\varepsilon=0,5\times10^{-1}$ ، المجال هو $[0,2]$.

الحل: