المحور الثالث: العائد والمخاطرة في المحفظة المالية

يتم من خلال هذا المحور التطرق الى كيفية قياس العائد والمخاطرة للمحفظة المالية

1. **حساب العائد للمحفظة المالية:** لحساب العائد للمحفظة المالية لابد من التمييز بين حالتين (وجود بيانات تاريخية، عدم وجود بيانات تاريخية

1.1. **حالة وجود بيانات تاريخية:** وهنا إذا توفرت لدينا بيانات تاريخية لكل العناصر المالية داخل المحفظة، في هذه الحالة يوجد لدينا طريقتان لحساب العائد الخاص بالمحفظة:

1.1.1. **طريقة النسب:** يتم اعتماد هذه الطريقة في حال توفر لدينا معلومات تخص المحفظة (وليس العناصر المالية داخل المحفظة)، في هذه الحالة يحسب العائد كمايلي:

$$R_P = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

حيث:

- R_P: عائد المحفظة؛
- V_1: قيمة المحفظة في نهاية الفترة؛
- V_0 : قيمة المحفظة في بداية الفترة.

1.1.2. **طريقة المتوسط المرجح:** يحسب عائد المحفظة بناءً على هذه الطريقة من خلال اجاد مجموع العوائد للاوراق المالية المكونة للمحفظة والمرجحة باوزانها(نسبة كل اصل داحل المحفظة)، وتحسب كما يلي:

عائد المحفظة في حال وجود بيانات تاريخية:

$$R_P = \sum W_i \bar{R}_i$$

$$W_i = \frac{V_i}{\sum V_i}$$

حيث:

- R_P: عائد المحفظة؛
- W_i: الوزن النسبي للأصل (مجموع الاوزان النسبة للاصول المالية داخل المحفظة يجب ان يكون 100%) ؛
- $\bar{R}_i$: عائد الاصل(الورقة المالية)؛
- V_i: قيمة الاصل (i).

عائد المحفظة في حال عدم وجود بيانات تاريخية $E(R_P) = \sum W_i E(R_i)$

حيث:

- $E(R_P)$: العائد المتوقع للمحفظة؛
- $E(R_i)$: العائد المتوقع للاصل المالي؛

2. حساب مخاطرة المحفظة المالية:

لقياس مخاطرة المحفظة المالية يتم عن طريق حساب الانحراف المعياري لعوائد المحفظة (δ_P) ، وكذلك معامل بيتا (β_P).

2.1. **الانحراف المعياري لعوائد المحفظة:** يتم حساب مخاطرة المحفظة المالية بناءً على النموذج الرياضي الذي قدمه "Markowitz" على النحو التالي:

$$\delta_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} W_i^2 \delta_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2W_i W_j Cov_{ij}}$$

حيث:

- W_i: الوزن النسبي للأصل المالي داخل المحفظة حيث : $\sum W_i = 1$؛
- δ_i: تباين الاصل المالي داخل المحفظة؛
- δ_P: تباين (مخاطرة) المحفظة؛
- Cov_{ij}: التباين المشترك للاصلين (i) و(j) ويحسب كما يلي:

➢ **في حالة وجود بيانات تاريخية:** $Cov_{ij} = \frac{\sum(R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)}{N-1}$

➢ **في حالة عدم وجود بيانات تاريخية:** $Cov_{ij} = \sum P_i [R_i - E(R_i)(R_j - E(R_j)]$

إذا علمنا ان التباين المشترك بين السهمين (الأصلان) (i) و(j) هو حاصل ضرب معامل الارتباط للسهمين (P_{ij}) في الانحراف المعياري السهم الاول (δ_i) والانحراف المعياري السهم الثاني (δ_j) ، حيث تصبح معادلة التباين المشترك كما يلي:

.

$$Cov_{ij} = P_{ij} \delta_i \delta_j$$

وبالعودة الى معادلة مخاطرة المحفظة المالية، فان المعادلة بوجود معامل الارتباط (P_{ij}) بين السهمان (i) و(j) بدلا من التباين المشترك (Cov_{ij})تصبح كما يلي:

$$\delta_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} W_i^2 \delta_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2W_i W_j \delta_i \delta_j P_{ij}}$$

ولتبسيط المعادلة الرياضية نفترض انه لدينا سهمان السهم (A) والسهم (B)، فاصبح معادلة المخاطرة المكونة من السهمين (A) و(B) كما يلي:

$$\delta_{P(A.B)} = \sqrt{W_A^2 \delta_A^2 + W_B^2 \delta_B^2 + 2W_A W_B Cov_{AB}}$$

وحالة وجود معامل الارتباط تصبح معادلة المخاطرة المكونة من السهمين (A) و(B) كما يلي:

$$\delta_{P(A.B)} = \sqrt{W_A^2 \delta_A^2 + W_B^2 \delta_B^2 + 2W_A W_B \delta_A \delta_B P_{AB}}$$

ولحساب مخاطرة المحفظة المكونة من ثلاثة (A.B.C) أسهم تصبح المعادلة كما يلي:

$$\delta_{P(A.B.C)} = \sqrt{W_A^2 \delta_A^2 + W_B^2 \delta_B^2 + W_C^2 \delta_C^2 + 2W_A W_B Cov_{AB} + 2W_A W_C Cov_{AC} + 2W_B W_C Cov_{BC}}$$

وفي حالة وجود معامل الارتباط تصبح معادلة المخاطرة المكونة من ثلاثة (A.B.C) أسهم كما يلي:

$$\delta_{P(A.B.C)} = \sqrt{W_A^2 \delta_A^2 + W_B^2 \delta_B^2 + W_C^2 \delta_C^2 + 2W_A W_B \delta_A \delta_B P_{AB} + 2W_A W_C \delta_A \delta_C P_{AC} + 2W_B W_C \delta_B \delta_C P_{BC}}$$

ملاحظة: لحساب مخاطرة المحفظة δ_P في حالة وجود او عدم وجود بيانات تاريخية يتم فقط تغيير طريقة حساب كل من التباين δ_i^2 لكل سهم والتباين المشترك Cov_{ij} لكل سهمين ومعامل الارتباط P_{ij} لكل سهمين.

2.2. معامل بيتا (Beta):

معامل بيتا مقياس إحصائي للمخاطر المنتظمة أي المخاطر التي لا يمكن تجنبها بالتنويع، وهو معامل يقيس درجة حساسية عوائد المحفظة المالية للتغيرات الحاصلة في عائد السوق، فإذا كان معامل بيتا قيمته (2) فهذا يعني أن التغير في عوائد المحفظة المالية سيكون ضعف التغير في عائد محفظة السوق. بمعنى آخر يؤدي تغير في عائد محفظة السوق بنسبة 10% سيؤدي إلى تغير في عائد المحفظة المالية بنسبة 20% وفي نفس

الاتجاه. تتراوح قيمة معامل بيتا بين قيم موجبة وقيم سالبة، القيم الموجبة تعني أن التغير في عوائد المحفظة المالية وعوائد محفظة السوق تكون في نفس الاتجاه، أما القيم السالبة فهي تعني أن التغير في عوائد المحفظة المالية وعوائد محفظة السوق تكون في اتجاهين متعاكسين، أي أن ارتفاع عائد محفظة السوق سيقابله انخفاض في عائد المحفظة المالية والعكس بالعكس. يحسب معامل بيتا للمحفظة المالية بعد إيجاد معامل بيتا الخاص بكل ورقة مالية تدخل في تكوينها والذي يعتمد على العلاقة التاريخية بين معدل عائد كل ورقة مالية ومعدل عائد محفظة السوق، كما يعتبر معامل بيتا المحدد الرئيسي لمدى مساهمة كل ورقة مالية في المخاطر الكلية للمحفظة المالية ويحسب معامل بيتا للمحفظة بالعلاقة التالية (Dahel, 1997):

$$\beta_P = \sum W_i \beta_i$$

$$\beta_i = \frac{Cov_{im}}{\delta_m^2}$$

حيث:

- β_P: مخاطرة المحفظة؛
- β_i: مخاطرة السهم (i)؛
- Cov_{im}: التباين المشترك للسهم مع عوائد السوق؛
- δ_m^2: تباين عوائد السوق (مخاطرة السوق).

فاذا كان لدينا سهمان (A.B) فان: $\beta_{P(AB)} = W_A\beta_A + W_B\beta_B$

اما لحساب مخاطرة السهم (A) يكون كما يلي:

في حالة وجود بيانات تاريخية

$$\beta_A = \frac{\frac{\sum(R_A - \bar{R}_A)(R_m - \bar{R}_m)}{N-1}}{\frac{(Rm - \overline{Rm})^2}{N-1}}$$

أي:

$$\beta_A = \frac{\sum(R_A - \bar{R}_A)(R_m - \bar{R}_m)}{(Rm - \overline{Rm})^2}$$

في حالة عدم وجود بيانات تاريخية

$$\beta_A = \frac{\sum P_i[R_A - E(R_A)(R_m - E(R_m)]}{\sum(R_m.P_m)^2}$$

مثال 1.3: اليك المعطيات التالية المتعلقة بالاسهم التالية:

السنوات	عائد السهم A (R_A)	عائد السهم B (R_B)	عائد السهم C (R_C)
2018	0.10	0.05	0.16

2019	0.11	0.09	0.14
2020	0.06	-0.04	0.05
2021	0	0.10	0
2022	-0.1	0.12	-0.15
2023	0.07	0.08	-0.02

المطلوب:

1. **احسب العائد والمخاطرة لكل اصل.**
2. **احسب العائد والمخاطرة لمحفظة مكونة من اصلية علما ان الاوزان النسبية متساوية.**
3. **احسب معامل الارتباط لكل اصلين.**

الاجابة:

1. **حساب العائد والمخاطرة لكل اصل:**

السنوات	R_A	R_B	R_C	$(R_A - \overline{R_A})$	$(R_B - \overline{R_B})$	$(R_C - \overline{R_C})$
2018	0.10	0.05	0.16	0.06	-0.1	0.13
2019	0.11	0.09	0.14	0.07	0.04	0.11
2020	0.06	-0.04	0.05	0.02	-0.09	0.02
2021	0	0.10	0	-0.04	0.05	-0.03
2022	-0.1	0.12	-0.15	-0.14	0.07	-0.18
2023	0.07	0.08	-0.02	0.03	0.03	-0.05
	$\sum R_A = 0.24$	$\sum R_B = 0.30$	$\sum R_C = 0.18$			
	$\overline{R_A} = \frac{\sum R_i}{N} = 0.04$	$\overline{R_B} = \frac{\sum R_i}{N} = 0.05$	$\overline{R_C} = \frac{\sum R_i}{N} = 0.03$			

$(R_A - \overline{R_A})^2$	$(R_B - \overline{R_B})^2$	$(R_C - \overline{R_C})^2$	$(R_A - \overline{R_A})(R_B - \overline{R_B})$	$(R_C - \overline{R_C})(R_A - \overline{R_A})$	$R_C -)(R_B - \overline{R_B})$ $(\overline{R_C}$
0.0036	0.01	0.0169	-0.006	0.0078	-0.013
0.0049	0.0016	0.0121	0.0028	0.0077	0.0044
0.0004	0.0081	0.0004	-0.0018	0.0004	-0.0018
0.0016	0.0025	0.0009	-0.002	0.0012	-0.0015
0.0196	0.0049	0.0324	-0.0098	0.0252	-0.0126
0.0009	0.0009	0.0025	0.0009	-0.0015	-0.0015
Σ= 0.031	**Σ= 0.028**	**Σ= 0.0652**	**Σ= -0.0159**	**Σ= 0.0408**	**Σ= -0.026**

COV_{BC} =-0.0052	COV_{AC}= 0.00816	COV_{AB}= -0.00318	δ_C^2 =0.01304	δ_B^2 =0.0056	δ_A^2 =0.0062

2. حساب العائد والمخاطرة للمحفظة:

➢ **حساب العائد للمحفظة**

- **حساب العائد لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية (A,B)**

لدينا: W_A=0.5 W_B=0.5

$$R_P = \sum W_i \overline{R}_i$$

$$R_P = W_A \overline{R}_A + W_B \overline{R}_B = (0.5)(0.04) + (0.5)(0.05) = 0.045$$

- **حساب العائد لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية (A,C)**

لدينا: W_A=0.5 W_C=0.5

$$R_P = \sum W_i \overline{R}_i$$

$$R_P = W_A \overline{R}_A + W_C \overline{R}_C = (0.5)(0.04) + (0.5)(0.03) = 0.035$$

- **حساب العائد لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية (B,C)**

لدينا: W_B=0.5 W_C=0.5

$$R_P = \sum W_i \overline{R}_i$$

$$R_P = W_B \overline{R}_B + W_C \overline{R}_C = (0.5)(0.05) + (0.5)(0.03) = 0.04$$

➢ **حساب المخاطرة للمحفظة:**

- **حساب المخاطرة لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية للأصلين (A,B)**

لدينا: W_A=0.5 W_B=0.5 δ_A^2=0.0062 δ_B^2=0.0056 COV_{AB}=- 0.00318

$$\delta_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} W_i^2 \delta_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2W_i W_j \delta_i \delta_j P_{ij}}$$

$$\delta_{P(A.B)} = \sqrt{W_A^2 \delta_A^2 + W_B^2 \delta_B^2 + 2W_A W_B Cov_{AB}}$$

$$\delta_{P(A.B)} = \sqrt{(0.5)^2(0.0062) + (0.5)^2(0.0056) + 2(0.5)(0.5)(-0.00318)}$$

$\delta_{P(A.B)} = \sqrt{0.00136} = 0.0368$

- حساب المخاطرة لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية للأصلين (A,C)

لدينا: $W_A=0.5$ $W_C=0.5$ $\delta_A^2=0.0062$ $\delta_C^2= 0.01304$ $COV_{AC}=-0.00816$

$$\delta_{P(A.C)} = \sqrt{W_A^2\delta_A^2 + W_C^2\delta_C^2 + 2W_AW_CCov_{AC}}$$

$$\delta_{P(A.C)} = \sqrt{(0.5)^2(0.0062) + (0.5)^2 0.01304 + 2(0.5)(0.5)(-0.00816)}$$

$$\delta_{P(A.C)} = \sqrt{0.00073} = 0.0270$$

- حساب المخاطرة لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية للأصلين (B,C)

لدينا: $W_B=0.5$ $W_C=0.5$ $\delta_B^2=0.0056$ $\delta_C^2= 0.01304$ $COV_{BC}=-0.0052$

$$\delta_{P(B.C)} = \sqrt{W_B^2\delta_B^2 + W_C^2\delta_C^2 + 2W_BW_CCov_{BC}}$$

$$\delta_{P(B.C)} = \sqrt{(0.5)^2(0.0056) + (0.5)^2 0.01304 + 2(0.5)(0.5)(-0.0052)}$$

$$\delta_{P(B.C)} = \sqrt{0.00206} = 0.0453$$

3. حساب معامل الارتباط

- حساب معامل الارتباط بين الاصلين (A,B)

لدينا: $COV_{AB}=-0.00318$ $\delta_A = \sqrt{0.0062}$ $\delta_B = \sqrt{0.0056}$

$$COV_{AB} = \delta_B\delta_C P_{BC}$$

$$P_{AB} = \frac{COV_{AB}}{\delta_A\delta_B} = \frac{-0.00318}{\sqrt{0.0062}\sqrt{0.0056}} = -0.5482$$

- حساب معامل الارتباط بين الاصلين (A,C)

لدينا: $COV_{AC}= -0.00816$ $\delta_A = \sqrt{0.0062}$ $\delta_C = \sqrt{0.01304}$

$$P_{AC} = \frac{COV_{AC}}{\delta_A\delta_C} = \frac{-0.00816}{\sqrt{0.0062}\sqrt{0.01304}} = -0.3067$$

- حساب معامل الارتباط بين الاصلين (B,C)

لدينا: $\delta_C = \sqrt{0.01304}$ $\delta_B = \sqrt{0.0056}$ $COV_{BC} = -0.0052$

$$P_{BC} = \frac{COV_{BC}}{\delta_B \delta_C} = \frac{-0.0052}{\sqrt{0.0056}\sqrt{0.01304}} = -0.2056$$

مثال 2.3: اليك المعطيات التالية المتعلقة بالاسهم التالية:

الحالة الاقتصادية المتوقعة	P_i	R_A	R_B	R_C
إزدهار	0.1	0.40	0.40	0.30
توازن	0.2	0.10	0.20	0.20
عادية	0.4	0	0.10	0.20
إنكماش	0.2	0.05-	0	0.10-
ركود	0.1	0.10-	0.20-	0

المطلوب:

1. **احسب العائد والمخاطرة لكل اصل.**
2. **احسب العائد والمخاطرة لمحفظة مكونة من اصلية علما ان الاوزان النسبية متساوية.**
3. **احسب معامل الارتباط لكل اصلين.**

الاجابة:

1. حساب العائد والمخاطرة لكل اصل:

الحالة الاقتصادية المتوقعة	P_i	R_A	R_B	R_C	$P_i . R_A$	$P_i . R_B$	$P_i . R_C$	$R_A - E(R_A)$	$R_B - E(R_B)$	$R_C - E(R_C)$
إزدهار	0.1	0.40	0.40	0.30	0.04	0.04	0.03	0	-0.06	-0.1
توازن	0.2	0.10	0.20	0.20	0.02	0.04	0.04	-0.02	-0.06	-0.09
عادية	0.4	0	0.10	0.20	0	0.04	0.08	-0.04	-0.06	-0.05
إنكماش	0.2	0.05-	0	0.10-	-0.01	0	-0.02	-0.05	-0.1	-0.15
ركود	0.1	0.10-	0.20-	0	-0.01	-0.02	0	-0.05	-0.12	-0.13
					$E(R_A) = \sum R_A . P$	$E(R_B) = \sum R_B . P$	$E(R_C) = \sum R_C . P$			

			0.13	0.1	0.04					

$P_i.(R_B - E(R_B))(R_C - E(R_C))$	$P_i.(R_A - E(R_A))(R_C - E(R_C))$	$P_i.(R_A - E(R_A))(R_B - E(R_B))$	$P_i.(R_C - E(R_C))^2$	$P_i.(R_B - E(R_B))^2$	$P_i.(R_A - E(R_A))^2$	$(R_C - E(R_C))^2$	$(R_B - E(R_B))^2$	$(R_A - E(R_A))^2$
0.0006	0	0	0.001	0.00036	0	0.01	0.0036	0
0.00108	0.00036	0.00024	0.00162	0.00072	0.00008	0.0081	0.0036	0.0004
0.0012	0.0008	0.00096	0.001	0.00144	0.00064	0.0025	0.0036	0.0016
0.003	0.0015	0.001	0.0045	0.002	0.0005	0.0225	0.01	0.0025
0.00156	0.00065	0.0006	0.00169	0.00144	0.00025	0.0169	0.0144	0.0025
COV_{BC} 0.00744	**COV_{AC}= 0.00331**	**COV_{AB}= 0.0028**	**$\delta^2_{C=}$ 0.00981**	**$\delta^2_{B=}$ 0.00596**	**$\delta^2_{A=}$ 0.00147**			

2. حساب العائد والمخاطرة للمحفظة:

- **حساب العائد للمحفظة**

- **حساب العائد المتوقع لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية (A,B)**

لدينا: $W_A=0.5$ $W_B=0.5$

$$E(R_P) = \sum W_i E(R_i)$$

$$E(R_P) = W_A E(R_A) + W_B E(R_B) = (0.5)(0.04) + (0.5)(0.1) = 0.07$$

- **حساب العائد المتوقع لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية (A,C)**

لدينا: $W_A=0.5$ $W_C=0.5$

$$E(R_P) = \sum W_i E(R_i)$$

$$E(R_P) = W_A E(R_A) + W_C E(R_C) = (0.5)(0.04) + (0.5)(0.13) = 0.085$$

- **حساب العائد المتوقع لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية (B,C)**

لدينا: $W_B=0.5$ $W_C=0.5$

$$E(R_P) = \sum W_i E(R_i)$$

$$E(R_P) = W_B E(R_B) + W_C E(R_C) = (0.5)(0.1) + (0.5)(0.13) = 0.115$$

- **حساب المخاطرة للمحفظة:**

- حساب المخاطرة لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية للأصلين (A,B)

لدينا: $W_A=0.5$ $W_B=0.5$ $\delta_A^2=0.00147$ $\delta_B^2=0.00596$ $COV_{AB}=0.0028$

$$\delta_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} W_i^2\delta_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2W_iW_j\delta_i\delta_jP_{ij}}$$

$$\delta_{P(A.B)} = \sqrt{W_A^2\delta_A^2 + W_B^2\delta_B^2 + 2W_AW_BCov_{AB}}$$

$$\delta_{P(A.B)} = \sqrt{(0.5)^2(0.00147) + (0.5)^2(0.00596) + 2(0.5)(0.5)(0.0028)}$$

$$\delta_{P(A.B)} = \sqrt{0.0032} = 0.0565$$

- حساب المخاطرة لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية للأصلين (A,C)

لدينا: $W_A=0.5$ $W_C=0.5$ $\delta_A^2=0.00147$ $\delta_C^2=0.00981$ $COV_{AC}=0.00331$

$$\delta_{P(A.C)} = \sqrt{W_A^2\delta_A^2 + W_C^2\delta_C^2 + 2W_AW_CCov_{AC}}$$

$$\delta_{P(A.C)} = \sqrt{(0.5)^2(0.00147) + (0.5)^2(0.00981) + 2(0.5)(0.5)(0.00331)}$$

$$\delta_{P(A.C)} = \sqrt{0.004475} = 0.06689$$

- حساب المخاطرة لمحفظة مكونة من اصلية بأوزان نسبية متساوية للأصلين (B,C)

لدينا: $W_B=0.5$ $W_C=0.5$ $\delta_B^2=0.00596$ $\delta_C^2=0.00981$ $COV_{BC}=0.00744$

$$\delta_{P(B.C)} = \sqrt{W_B^2\delta_B^2 + W_C^2\delta_C^2 + 2W_BW_CCov_{BC}}$$

$$\delta_{P(B.C)} = \sqrt{(0.5)^2(0.00596) + (0.5)^2(0.00981) + 2(0.5)(0.5)(0.00744)}$$

$$\delta_{P(B.C)} = \sqrt{0.00766} = 0.08753$$

3. حساب معامل الارتباط

- حساب معامل الارتباط بين الاصلين (A,B)

لدينا: $\delta_B = \sqrt{0.00596}$ $\delta_A = \sqrt{0.00147}$ COV_{AB}=0.0028

$$COV_{AB} = \delta_B \delta_C P_{BC}$$

$$P_{AB} = \frac{COV_{AB}}{\delta_A \delta_B} = \frac{0.0028}{\sqrt{0.00147}\sqrt{0.00596}} = 0.2628$$

- حساب معامل الارتباط بين الاصلين (A,C)

لدينا: $\delta_C = \sqrt{0.00981}$ $\delta_A = \sqrt{0.00147}$ COV_{AC}= 0.00331

$$P_{AC} = \frac{COV_{AC}}{\delta_A \delta_C} = \frac{0.00331}{\sqrt{0.00147}\sqrt{0.00981}} = 0.2743$$

- حساب معامل الارتباط بين الاصلين (B,C)

لدينا: $\delta_C = \sqrt{0.00981}$ $\delta_B = \sqrt{0.00596}$ COV_{BC}= 0.00744

$$P_{BC} = \frac{COV_{BC}}{\delta_B \delta_C} = \frac{0.00744}{\sqrt{0.00596}\sqrt{0.00981}} = 0.3062$$