

Cours de la matière : Théorie des graphes
Pour les étudiants de la première année Master Mathématiques Appliquée et
Fondamentales
Département de mathématiques
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila
Anné universitaire 2024/2025

Cours N : 2.

Table des matières

introduction	3
1 Modes de representation d'un graphe	5
1.1 Représentation d'un graphe	5
1.1.1 Représentation graphique	5
1.1.2 Représentation Matricielle	6
2 Quelques classes de graphes	8
3 Parcours eulériens et hamiltoniens	14

Introduction

La théorie des graphes est un domaine des mathématiques qui étudie les structures discrètes appelées *graphes*, composées de *sommets* et d'*arêtes*. Elle joue un rôle fondamental dans de nombreuses disciplines, notamment en recherche opérationnelle, en informatique, en ingénierie et en sciences sociales. Cette introduction présente les fondements de la théorie des graphes, son histoire et ses principaux domaines d'application.

La recherche opérationnelle s'intéresse à l'optimisation des systèmes complexes, et la théorie des graphes y occupe une place centrale. Des problèmes tels que le plus court chemin (Dijkstra), le problème du voyageur de commerce (TSP), et les problèmes d'affectation et de planification reposent sur des structures de graphes. En modélisant ces systèmes sous forme de graphes, il devient possible d'appliquer des algorithmes efficaces pour optimiser les ressources et minimiser les coûts.

L'origine de la théorie des graphes remonte à Leonhard Euler, qui en 1736 résolut le célèbre problème des sept ponts de Königsberg, posant ainsi les bases de la discipline. Par la suite, de nombreux mathématiciens, tels que Kirchhoff (circuits électriques), König (coloration des graphes) et Erdos (théorie des graphes extrémales), ont contribué à son développement. Aujourd'hui, la théorie des graphes est un domaine de recherche actif avec des applications croissantes.

La théorie des graphes trouve des applications dans de nombreux domaines :

- **Informatique** : Représentation et recherche sur les réseaux (internet, bases de données, intelligence artificielle, blockchain).

-
- **Transport et logistique** : Optimisation des itinéraires, planification des réseaux ferroviaires et aériens.
 - **Biologie et chimie** : Analyse des interactions biologiques, modélisation des structures moléculaires.
 - **Télécommunications** : Conception des réseaux de communication et analyse du routage des paquets.
 - **Sciences sociales** : Études des réseaux sociaux et des interactions humaines.

La théorie des graphes est un outil puissant permettant de modéliser et résoudre des problèmes complexes dans divers domaines scientifiques et industriels. Ce cours vise à fournir les bases théoriques et les méthodes algorithmiques essentielles pour comprendre et appliquer cette discipline.

1

Modes de representation d'un graphe

Les graphes sont des structures fondamentales en informatique, utilisées pour modéliser des relations complexes entre objets. Ils peuvent être représentés de différentes manières, notamment par des matrices d'adjacence ou des listes d'adjacence, chacune ayant ses avantages et inconvénients en termes de performance et de simplicité d'implémentation.

1.1 Représentation d'un graphe

1.1.1 Représentation graphique

Il existe une infinité de représentation d'un graphe. Les arêtes ne sont pas forcément rectilignes. Si on peut dessiner un graphe G dans le plan sans qu'aucune arête ne coupe une autre, on dit que G est planaire.

1.1 Représentation d'un graphe

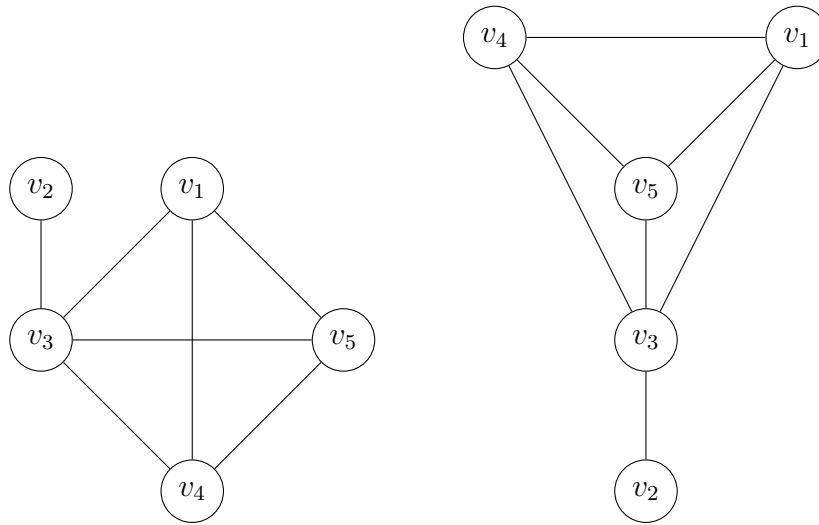


FIGURE 1.1 – (a) Une représentation non plane du graphe G et (b) sa représentation plane

1.1.2 Représentation Matricielle

Matrice d'adjacences

On peut Représenter un graphe simple par une matrice $(n * n)$ est un tableau de n lignes et n colonnes, (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de la colonne j . Dans une matrice d'adjacences les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe .Un $\ll 1 \gg$ à la position (i, j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j .

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

- Elle est carrée.
- Il n'y a que des zéros sur la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. Un 1 sur la diagonale indiquerait une boucle.
- Elle est symétrique : $m_{i,j} = m_{j,i}$. On peut dire que la diagonale est un axe de symétrie.
- Il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque graphe. Celle-ci n'est la matrice d'adjacences d'aucun autre graphe.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d'adjacence du garphe G illustré dans

la figure 1.1

1.1 Représentation d'un graphe

Matrice d'incidence

La matrice d'incidence est une matrice $n * m$ où n est le nombre de sommets et m est le nombre d'arêtes du graphe. l'intersection (i,j) contient la valeur

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si le sommet } i \text{ est une extrémité de l'arête } j; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 1.1 *Considérons le graphe non orienté suivant :*

$$G = (V, E) \quad \text{avec} \quad V = \{A, B, C, D\} \quad \text{et} \quad E = \{(A, B), (A, C), (B, C), (B, D), (C, D)\}.$$

1. Déterminer la **matrice d'adjacence** de G .
2. Déterminer la **matrice d'incidence** de G .

Solution

1. Matrice d'Adjacence

La matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$ d'un graphe non orienté est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour le graphe G , en prenant l'ordre des sommets (A, B, C, D) , on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Matrice d'Incidence La matrice d'incidence $M = (m_{ij})$ est définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si le sommet } v_i \text{ est une extrémité de l'arête } e_j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En numérotant les arêtes : $e_1 = (A, B)$, $e_2 = (A, C)$, $e_3 = (B, C)$, $e_4 = (B, D)$, $e_5 = (C, D)$, et en prenant l'ordre des sommets (A, B, C, D) , la matrice d'incidence est :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2

Quelques classes de graphes

Les graphes peuvent être classés selon différentes caractéristiques structurelles et algébriques. Certains types de graphes jouent un rôle fondamental en théorie des graphes et possèdent des propriétés particulières facilitant leur analyse. Parmi les plus importants, on trouve les graphes complets, bipartis, planaires et les arbres. Chacune de ces classes possède des applications spécifiques en informatique, en recherche opérationnelle et en sciences des réseaux. Cette section explore ces classes et leurs principales propriétés. **Corde** Une *corde* est une arête qui relie deux sommets non consécutifs dans une chaîne.

Une *chaîne minimale induite* par n sommets, notée par P_n , est une chaîne élémentaire sans corde.

Cycle Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues.

Un *cycle élémentaire* C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. Le graphe illustré dans la figure FIG.2.1 représente le cycle d'ordre 5 $C_5 = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1$.

Circuit dans un Graphe Orienté

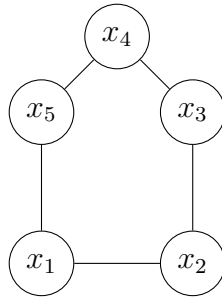


FIGURE 2.1 – Le cycle $C_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1\}$

Un **circuit** dans un graphe orienté $G = (V, E)$ est un chemin (v_1, v_2, \dots, v_k) tel que :

- $v_1 = v_k$ (le chemin est fermé),
- tous les sommets v_1, v_2, \dots, v_{k-1} sont distincts,
- $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, (v_i, v_{i+1}) \in E$.

Autrement dit, un circuit est un chemin orienté fermé qui ne repasse par aucun sommet (sauf le premier et le dernier qui coïncident).

Graphe triangulé Un graphe est dit triangulé si chacun de ses cycles de nombre d'arêtes A tel que $|A| \geq 4$ possède une corde c'est à dire si chacun de ses cycles de G est d'ordre inférieure ou égale 3 .

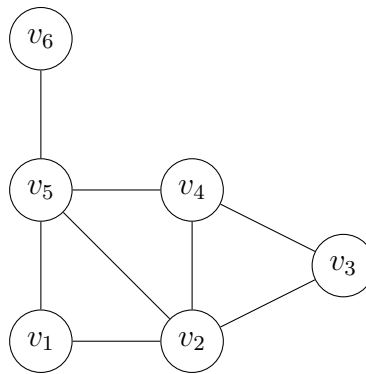


FIGURE 2.2 – Graphe triangulé

Exercice 2.1 *Chercher les différentes propriétés d'un graphe triangulé. Un travail à remettre sous forme d'un rapport.*

Clique et stable Une clique K dans un graphe G est un ensemble de sommets deux à deux adjacents tel que $G[K]$ est un graphe complet. Un stable S dans un graphe G est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents tel que $G[S]$ est un graphe sans arêtes. Le cardinal du plus grand stable est le nombre de stabilité de G , on le note $\alpha(G)$.

Exercice 2.2 *Calculer le nombre de stabilité pour une chaîne et un cycle d'ordre n .*



FIGURE 2.3 – (a) Un stable maximal et (b) Un stable maximum

Complémentaire d'un graphe Le complémentaire d'un graphe G est le graphe noté \bar{G} défini par : $V_{\bar{G}} = V_G$ et l'arête $uv (u \neq v) \in E_{\bar{G}}$ si et seulement si $uv \notin E_G$.

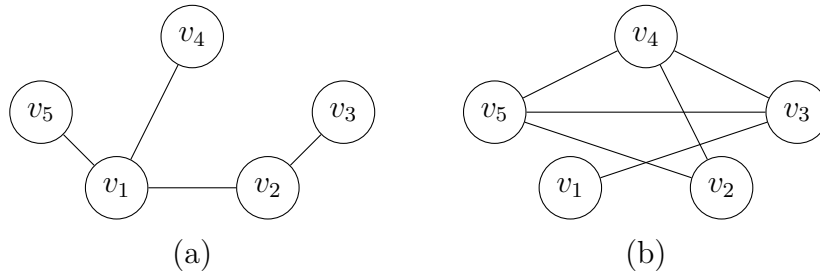


FIGURE 2.4 – Le Graphe (a) et son complémentaire (b)

Graphe complet Un graphe simple est dit complet si toute paire de sommets de G est reliée par une arête.

Exemple 2.1 Le graphe K_5 illustré dans FIG.2.5 est un graphe complet à 5 sommets.

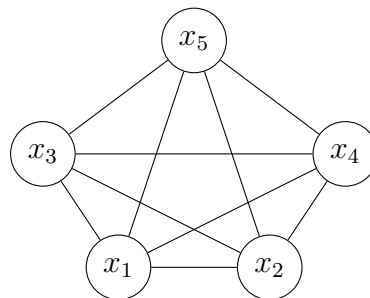


FIGURE 2.5 – Le graphe complet K_5

Graphe biparti Un graphe est dit *biparti* s'il est possible de partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous ensembles V_1 et V_2 tels que les sous graphes induits par V_1 (resp. V_2)

ne contient aucune arête.

Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle de longueur impair.

Un graphe est dit *biparti complet*, et est noté $K_{m,n}$, si $|V_1|=m$ et $|V_2|=n$ et tout sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2 .

Exemple 2.2 Le graphe illustré dans FIG.2.6 représente le graphe biparti complet $K_{3,2}$

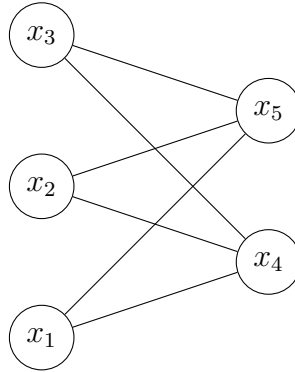


FIGURE 2.6 – Le graphe biparti complet $K_{3,2}$

Isomorphisme de Graphes Deux graphes $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ sont dits **isomorphes** s'il existe une bijection

$$f : V_G \rightarrow V_H$$

telle que pour tous $u, v \in V_G$, on a :

$$(u, v) \in E_G \iff (f(u), f(v)) \in E_H.$$

Autrement dit, un isomorphisme de graphes est une correspondance entre les sommets de G et H qui préserve les arêtes.

Dans ce cas, on note $G \simeq H$.

Exercice 2.3 Vérification de l'Isomorphisme de Graphes

Soient les graphes G_1 et G_2 définis par :

$$G_1 = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (a, c)\})$$

$$G_2 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (1, 3)\})$$

Montrer que G_1 et G_2 sont isomorphes et donner une bijection entre leurs sommets.

Solution : On définit l'application suivante :

$$f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, \quad f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 3, \quad f(d) = 4.$$

On vérifie que cette bijection préserve les arêtes :

$$(a, b) \mapsto (1, 2), \quad (b, c) \mapsto (2, 3), \quad (c, d) \mapsto (3, 4), \quad (d, a) \mapsto (4, 1), \quad (a, c) \mapsto (1, 3).$$

Comme toutes les arêtes sont préservées, $G_1 \simeq G_2$.

Fermeture Transitive d'un Graphe Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. La **fermeture transitive** de G , notée $G^+ = (V, E^+)$, est le graphe obtenu en ajoutant à G toutes les arêtes nécessaires pour garantir que, si un chemin existe entre deux sommets, alors une arête directe les relie. Formellement, E^+ est défini comme :

$$E^+ = \{(u, v) \mid \text{il existe un chemin de } u \text{ à } v \text{ dans } G\}.$$

Autrement dit, la fermeture transitive de G est le plus petit sur-graphe transitif de G , c'est-à-dire le plus petit graphe contenant G tel que :

$$\forall u, v, w \in V, \quad (u, v) \in E^+ \text{ et } (v, w) \in E^+ \Rightarrow (u, w) \in E^+.$$

Exercice 2.4 Fermeture Transitive d'un Graphe

Soit le graphe orienté G défini par :

$$V = \{A, B, C, D\}, \quad E = \{(A, B), (B, C), (C, D)\}.$$

Déterminer sa fermeture transitive G^+ .

Solution : On ajoute les arêtes transitives :

$$(A, C) \text{ car } (A, B) \text{ et } (B, C) \in E.$$

$$(B, D) \text{ car } (B, C) \text{ et } (C, D) \in E.$$

$$(A, D) \text{ car } (A, B), (B, C), (C, D) \in E.$$

Ainsi, la fermeture transitive est :

$$E^+ = \{(A, B), (B, C), (C, D), (A, C), (B, D), (A, D)\}.$$

Graphe Sans Circuit

Un graphe orienté $G = (V, E)$ est dit **sans circuit** (ou acyclique) si aucun circuit n'existe dans G . Formellement, G est acyclique si et seulement s'il n'existe pas de séquence de sommets (v_1, v_2, \dots, v_k) avec $k \geq 2$ telle que :

$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1) \in E.$$

Un graphe orienté sans circuit est appelé un **graphe orienté acyclique** (DAG : Directed Acyclic Graph).

Exercice 2.5 Détection de Circuits *Considérons le graphe orienté suivant :*

$$V = \{X, Y, Z\}, \quad E = \{(X, Y), (Y, Z), (Z, X)\}.$$

Montrer que ce graphe contient un circuit.

Solution : On observe que :

$$X \rightarrow Y, \quad Y \rightarrow Z, \quad Z \rightarrow X.$$

Ce qui forme un chemin fermé $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X$, donc un circuit. Ainsi, le graphe n'est pas acyclique.

Noyau d'un Graphe Orienté Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. Un sous-ensemble $N \subseteq V$ est appelé un **noyau** de G si :

- **Indépendance** : Pour tous $u, v \in N$, avec $u \neq v$, on a $(u, v) \notin E$, c'est-à-dire qu'aucune arête orientée ne relie deux sommets de N .
- **Absorption** : Pour tout sommet $w \in V \setminus N$, il existe un sommet $v \in N$ tel que $(w, v) \in E$, c'est-à-dire que chaque sommet hors de N a un successeur dans N .

3

Parcours eulériens et hamiltoniens

Les parcours eulériens et hamiltoniens sont des concepts fondamentaux en théorie des graphes, liés aux chemins traversant toutes les arêtes ou tous les sommets d'un graphe. Ces notions trouvent des applications en optimisation des trajets, en logistique et en bio-informatique. **Graphes eulériens** On appelle cycle eulérien d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G . Un graphe est dit eulérien s'il possède un cycle eulérien. On appelle chaîne eulérienne d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G . Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est semi- eulérien. Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

Théorème 3.1 (*Théorème d'Euler (1736)*) *Un graphe connexe est eulérien si et seulement si chacun de ses sommets est incident à un nombre pair d'arêtes.*

Si exactement deux sommets s et t sont incidents à un nombre impair d'arêtes, le graphe est dit semi-eulérien.

Graphes hamiltoniens On appelle cycle hamiltonien d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de G . Un graphe est dit hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien. On appelle chaîne hamiltonienne d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets de G . Un graphe ne possédant que des chaînes hamiltoniennes est semi-hamiltonien. Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes (semi-)hamiltoniens. On peut énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes :

- un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien ;
- si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien ;
- les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Théorème 3.2 (*Ore*)

Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) > n$, alors G est hamiltonien.

Corollaire 3.1 (*Dirac*) Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour tout sommet x de G , on a $d(x) > \frac{n}{2}$, alors G est hamiltonien.

Exercice 3.1 Soit G un graphe non orienté connexe défini par l'ensemble des sommets $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ et l'ensemble des arêtes

$$E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, F\}, \{E, F\}\}.$$

1. Déterminer si G est un graphe eulérien.
2. Déterminer si G est un graphe hamiltonien.

Solution

Vérification du caractère eulérien Un graphe est eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

Calculons les degrés des sommets :

Sommet	Degré
<i>A</i>	3
<i>B</i>	3
<i>C</i>	4
<i>D</i>	3
<i>E</i>	3
<i>F</i>	2

On constate que les sommets *A, B, D, E* ont un degré impair.

Le graphe n'est donc pas eulérien car il possède plus de deux sommets de degré impair.

Vérification du caractère hamiltonien Un graphe est hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien, c'est-à-dire un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet.

Nous utilisons le critère de Dirac : un graphe connexe avec n sommets est hamiltonien si tous ses sommets vérifient $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$. Ici, $n = 6$, donc tous les sommets devraient avoir un degré d'au moins 3.

Tous les sommets vérifient cette condition, mais ce critère ne garantit pas toujours l'existence d'un cycle hamiltonien.

On essaie de trouver un cycle hamiltonien :

$$A - B - E - F - D - C - A$$

Ce cycle passe bien par tous les sommets une seule fois avant de revenir au point de départ, donc G est hamiltonien.