مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء

مشـــكلة الارتباط الذاتي للبواقي (Auto−correlation) أو الارتباط المتســـلســـل للبواقي (Serial−correlation) تعني عدم اســتقلال القيمة المقدرة للمتغير العشــوائي في فترة زمنية معينة عن القيمة المقدرة له في فترة زمنية معينة سابقة (وهذا يخالف أحد الافتراضـات الكلاسيكية المهمة في نموذج الانحدار الخطي، وهو استقلال أو عدم وجود ارتباط ذاتي للبواقي).

وسوف يتم تناول هذه المشكلة من خلال هذا المبحث لمعرفة الآتي:

1. طبيعة مشكلة الارتباط الذاتي.
2. أشكال الارتباط الذاتي.
3. أسباب مشكلة الارتباط الذاتي.
4 أهم الآثار المترتبة على وجود مشكلة الارتباط الذاتي.
5. أهم الاختبارات المستخدمة للكشف عن مشكلة الارتباط الذاتي.
6. طرق علاج مشكلة الارتباط الذاتي.

1.1 طبيعة مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء:

يعد الارتباط الذاتي Autocorrelation نوع خاص من أنواع الارتباط العادية. فعندما نتحدث عن حالة الارتباط بين متغير تابع وآخر مستقل، نقيس ذلك بمعامل الارتباط Correlation Coefficient، وعندما نريد معرفة درجة الارتباط بين المتغيرات مع بعضها البعض، نستعين بمصفوفة معاملات الارتباط الجزئية Partial Correlation Coefficients Matrix للمتغيرات المســتقلة، أما الارتباط الذاتي فإنه ينحصـــر بالعلاقة بين القيم المتتالية للمتغير نفســه، وأن هذا المتغير هو المتغير العشـوائي (U)، أي درجة الارتباط بين قيمة (U) في الفترة (t)، وقيمته في $(t-2, t-1)$ ضمن سلسلة مشاهدات ذلك المتغير (الرشيد صفحة 210).

تشـــير نماذج الانحدار عادة إلى مشـــكلة الارتباط الذاتي بوجود ارتباط بين القيم المتتالية للحد العشـــوائي (U_i)، وفي هذه الحالة تكون قيم معامل الارتباط بين القيم المتتالية للحد العشوائي غير مساوية للصفر.

$$E\left(U_i U_j\right) \neq 0 \quad i \neq j$$

وفي هذه الحالة تكون قيمة (U_I) غير مســتقلة عن (U_J)، ويعني هذا أن خطأ حدث في فترة ما وتم أخذه في الفترات التالية، ممّا يؤدّي إلى تكرار الخطأ نفســه أكثر من مرة، أي أنه يوجد خطأ واحد لكنه يتكرر في كل الفترات التالية، ممَّا يؤدِّي لظهور قيم المتغير العشوائي عند مستوى يختلف عن القيم الحقيقية.

ملحوظة: يلاحظ أن ظاهرة الارتباط الذاتي كثيرة الحدوث في بيانات السلاسل الزمنية أكثر منها في بيانات المقطع العرضي)

2.1 أشكال الارتباط الذاتي:

أولاً: قد يكون الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى (First Order) أو من الرتبة الثانية أو من رتبة أعلى.

نجد في الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى أن كل قيمة من قيم الحد العشوائي مرتبطة بالقيمة التي تسبقها فقط.

$$U_i = PU_{i-1} + e_i$$

حيث:

U_i: قيمة الحد العشوائي في الفترة الحالية.

U_{i-1} قيمة الحد العشوائي في الفترة السابقة.

e_i الحد العشوائي في معادلة الحد العشوائي O^{U_i}

P معامل الارتباط الذاتي، حيث نجد أن $-1 \leq P \leq +1$

يلاحظ أن قيمة P غير معطاة، ويتم تقديرها بطرق مختلفة نذكر منها:

أولاً: طريقة كوكران – أوركات:

تعتبر من أقدم الطرق لتقدير (P)، حيث قدم Cochrane, D وزميله GH Orcutto, بحث مشــترك عام 1949، توصلا من خلاله إلى صيغة لتقدير (P) كالآتي:

$$\hat{p} = \frac{\sum \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum(\hat{e}_{t-1}^2)}$$

ويتم التوصــــل إلى تلك الصــــيغة بخطوات متدرجة من خلال تطبيق طريقة (OLS)، والحصــــول على مقدرات$(\hat{\beta})$ وفق الصيغة التالية: $\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$

لاستخدامها في تقدير البواقي الأولى First-round residuals باعتماد المعادلة: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$

وباعتماد خطوات لاحقة يتم اسـتخدام $(\hat{P})$ لتحويل المتغيرات الأصـلية باسـتخدام (OLS) وفق الصـيغة الآتية:

$$(Y_t - \hat{p}Y_{t-1}) = \beta_0(1-\hat{p}) + \beta_1(X_t - \hat{p}X_{t-1}) + U_t$$

ثم تثبت مقدرات $(\hat{\hat{\beta}}_0)$ و $(\hat{\hat{\beta}}_1)$ عندما: $(\hat{\hat{\beta}}_0) = \beta_0(1-\hat{p})$

باستخدام $(\hat{\hat{\beta}}_0)$ و $(\hat{\hat{\beta}}_1)$ يتم حساب البواقي الثانية $(\hat{e}_t)$ حيث أن: $\hat{e}_t = Y_t - \hat{\hat{Y}}_t$

عندما:

$$\hat{\hat{Y}}_t = \hat{\hat{\beta}}_0 + \hat{\hat{\beta}}_1 + X_t$$

ثم يتم التقدير الثاني لـ (ρ)، والذي يمثل معامل الارتباط من الدرجة الثانية، على النحو الآتي:

$$\hat{\hat{p}} = \frac{\sum \hat{e}_t \hat{\hat{e}}_{t-1}}{\sum \hat{\hat{e}}_{t-41}^2}$$

وهكذا يتم التقدير الثالث والرابع لقيمة (p)، وبالتالي تحويل المقدرات الأصـــلية إلى صـــيغ أخرى قد تكون نتيجتها أفضـــل، إلا أن اختبار أي تقدير أفضـــل من الآخر، لم توضـــحه هذه الطريقة، نظرًا لعدم وجود اختبار يثبت معنوية (p) المقدر في ذلك الوقت كاختبار دربن الذي نشـــر عام 1970، على الرغم من أن هناك من يســـتخدم ذلك الاختبار من أجل الوقوف على معنوية (p) المقدر عند اتباع تلك الطريقة في التقدير (الرشـــيد صفحة 213).

ثانيًا: طريقة دربن واتسون

في مقالة مشتركة لـــ Watson, GS, Durbin, J نشرت عام 1951، تم تقدير معامل الارتباط الذاتي من خلال إحصائية d (d statistic) المقدرة، وتسمى إحصائية D.W وتأخذ الصيغة الآتية:

$$d^* = 2(1-\hat{\rho})$$

حيث يتم تقدير (ρ) بإعادة كتابة الصيغة أعلاه فتصبح:

$$\hat{\rho} = \frac{1-d^*}{2}$$

$$\therefore\ \hat{\rho} = 1 - \frac{d^*}{2}$$

وتسمى تلك الطريقة بالطريقة المبسطة.

ثالثًا: طريق ثيل–نايجر:

هي طريقة مطورة لطريقة درين–واتســـون في تقدير معامل الارتباط الذاتي، حيث أضـــاف Nagar, AL, Theil,H في بحثهما عام 1961 عدد المتغيرات المســتقلة (k) وحجم العينة (n) إلى الصــيغة لتظهر صــيغة جديدة باسمهما أخذت الشكل الآتي:

$$\hat{\rho} = \frac{n^2\left(1 - \frac{d^*}{2}\right) + (k+1)^2}{n^2 - (k+1)^2}$$

أما في حالة الارتباط الذاتي من الرتبة الثانية نجد أن كل قيمة من قيم الحد العشـــــوائي مرتبطة بالقيمتين السابقتين لها.

$$U_i = P_1 U_{i-1} + P_2 U_{i-2} + e_i$$

وهكذا بالنسبة للحالات الأخرى من الرتبة الأعلى.

$$U_i = P_1 U_{i-1} + P_2 U_{i-2} + \cdots . + P_n U_{i-n} + e_i$$

ثانيًا: الارتباط الذاتي قد يكون ارتباطاً ذاتيًا زمنيا Time Series Auto–correlation (في حالة السلاسل الزمنية)، أو قطاعيًا (في حالة البيانات القطاعية)

أ. **الارتباط الذاتي الزمني:** يشـير إلى الارتباط بين القيم المتتالية للحد العشـوائي عبر فترات زمنية متعاقبة عند استخدام بيانات سلسلة زمنية.

ب. **الارتباط الذاتي القطاعي:** يشير إلى الارتباط بين القيم المختلفة للحد العشوائي الخاصـة بمفردات العينة عند نقطة زمنية معينة، ويوجد عند استخدام بيانات قطاعية.

ثالثاً: الارتباط الذاتي قد يكون موجبًا أو ســالبًا، وذلك كالآتي: بافتراض أن معامل المتغير العشــوائي يمكن إعطاؤه بالكيفية التالية (الرشيد صفحة 208):

$$U_i = P\hat{U}_{i-1} + e_i$$

حيث $-1 \leq p \leq 1$ ، $i = 1,2,3 \ldots, n$

U_i: تمثل القيمة المقدرة للمتغير العشوائي

e_i: تمثل القيمة الفعلية

$\hat{\mathrm{P}}$: تمثل معامل الارتباط الذاتيe_i

وهنا يمكن التمييز بين ثلاث حالات من المعادلة السابقة كما يلي:

1. عندما يكون $\widehat{P} = 0$ فأن $(U_i) = e_i$

أي أن المتغير العشوائي (U_i) يصبح (e_i) أي لا يوجد ارتباط ذاتي.

2. عندما يكون $\widehat{P} = 1$ ، معنى ذلك أن القيمة المقدرة للمتغير العشوائي في الفترة السابقة تصبح أكثر أهمية في تحديد القيمة المقدرة للمتغير العشوائي في الفترة الزمنية الحالية U_i (ويشير ذلك إلى وجود درجة عالية من الارتباط الذاتي).

3. عندما تكون قيمة $\widehat{P}$ سالبة، معنى ذلك أن المتغير العشوائي له اتجاه لتغيير الإشارات من السالب إلى الموجب والرجوع ثانية إلى الشاهدات اللاحقة.

3.1 أسباب مشكلة الارتباط الذاتي:

هناك عدد من الأسباب تؤدي إلى ظهور مشكلة الارتباط الآتي للبواقي من أهمها:

1. وجود ظاهرة الدورية في السلاسل الزمنية، حيث تميل أغلب السلاسل الزمنية للتزايد في حالة الرواج وإلى التناقص في حالة الهبوط.
2. حذف بعض المتغيرات الهامة من النموذج المراد تقديره، في هذه الحالة يظهر ما يسمى بشبه الارتباط الذاتي (Quasi Auto-correlation)، وتأثير ذلك يظهر ضمن المتغير العشوائي.
3. وجود ظاهرة الإبطاء في استجابة الوحدات الاقتصادية.
4. الصياغة الدالية غير الدقيقة لنموذج الانحدار المراد تقديره (سوء تعيين الشكل الرياضي للنموذج)، فقد يختار الباحث نموذجًا خطيًا للتعبير عن سلوكية الظاهرة المدروسة، بينما في الواقع السلوكية الصحيحة أن تكون العلاقة غير خطية، وبذلك ينتج نوع من الترابط الذاتي في العنصر العشوائي.
5. أخطاء التقريب وقياس البيانات، مثل تحويل البيانات من شهرية إلى ربع سنوية، وكذلك التحويل من الأساس السنوي إلى الأساس الربيعي.
6. طرق التقدير وتنبؤ البيانات التي تقوم بها مراكز إعداد البيانات قد تكون مسؤولة عن ظهور هذه المشكلة.

4.1 أهم آثار الارتباط الذاتي للبواقي:

الارتباط الذاتي بين الأخطاء العشوائية يمكن أن يكون موجبًا أو سالبًا، حيث إن الارتباط الموجب تكون فيه الأخطاء العشوائية المتقاربة متغيرة ببطء نحو التزايد أو التناقص، أما في الارتباط الذاتي السالب، فإن القيم

المتجاورة تتحرك بشــكل متنافر من الإيجاب إلى الســلب للإيجاب، وبالتالي فإن تطبيق طريقة (OLS) في ظل مشــكلة الارتباط الذاتي (الموجب أو الســالب) يترتب عليه العديد من الآثار على صــفات المعلمات المقدرة من أهمها:

1. لا يؤثر وجود الارتباط الذاتي على درجة تحيز قيم المعالم المقدرة، حيث تظل القيم المقدرة غير متحيزة، وكذلك متسقة ولكنها تفتقد صفة الكفاءة.
2. يؤدي وجود مشــكلة الارتباط الذاتي إلى صـــغر حجم الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة الأمر الذي يؤدي إلى:

أ. رفع معنوية المعلمات المقدرة.

ب. عدم دقة فترات الثقة التي تستخدم الأخطاء المعيارية في حسابها.

ج. يكون تباين القيم المقدرة لمعاملات نموذج الانحدار متحيزًا، لذلك كافة القوانين التي تعتمد على التباين تكون غير دقيقة مثل قوانين قيمة (t) و (f).

د. عدم دقة التنبؤات المستخلصة باستخدامك (OLS)، لذلك يمكن الحصول على تنبؤات أكثر دقة باستخدام طريقة (GLS).

هـ. المبالغة في تقدير قيم معامل التحديد (R^2).

5.1 اختبارات الكشف عن مشكلة الارتباط الذاتي للبواقي:

لمعرفة الاختبارات المســـتخدمة للكشـــف عن مشــكلة الارتباط الذاتي للبواقي يتعين التفرقة بين نوعين من معايير اختبار الارتباط الذاتي:

- الأول: الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى.
- الثاني: الارتباط الذاتي من رتبة أعلى.

أولاً: اختبارات الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى: نجد من أهم وأشهر هذه الاختبارات:

1. اختبار دارين واتسون Durbin Watson (D.W):

يعتبر اختبار دارين واتسون من أهم الاختبارات المستخدمة للتحقق من وجود ارتباط ذاتي بين القيم الحقيقية للمتغير العشوائي. وقدم هذا الاختبار من قبل Durbin, J. و Watson .G. S, في بحثيهما المشتركين عامي 1950 و 1951 وصيغته العامة تأخذ الشكل الآتي (الرشيد صفحة 218):

$$D.W = d^* = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

يلاحظ من الصـــيغة أعلاه أنها تمثل نســبة مجموع مربع الانحرافات في البواقي المتتالية على مجموع مربع البواقي، وتكمن فائدة هذا الاختبار في أنه مبني على البواقي المقدرة، والتي يمكن حســـابها بســـهولة من تحليل الانحدار.

عند فك مجموع المربع في بسط الصيغة نحصل على:

$$d^* = \frac{\sum e_t^2 + \sum e_{t-1}^2 - 2\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2}$$

ولكون أن $(\sum e_t^2)$ و$(\sum e_{t-1}^2)$ يختلفان فقط في مشاهدة واحدة، لذا فإنهما بشكل تقريبي متساويان، لذا فإن:

$$d^* = \frac{2\sum e_t^2 - 2\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2}$$

$$d^* = \frac{2\sum e_t^2}{\sum e_t^2} - \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2}$$

$$d^* = (2 - 2\hat{\rho})$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2}$$

عندمـا: $d^* = (2 - 2\hat{\rho})$

شروط اختبار دارين واتسون

1. لابد أن يكون حجم العينة أكبر من 14 مشاهدة لأن الجداول الخاصة بالاختبار تبدأ من $n = 15$.
2. يسـتخدم في حالة وجود ارتباط ذاتي من الرتبة الأولى فقط (ويسـمى أحيانًا بارتباط ماركوف من الدرجة الأولى ((AR(1))، وتأخذ معادلة انحداره الصـــيغة التالية: $U_t = PU_{t-1} + e_t$ ومن ثم فهو لا يصلح في حالة وجود ارتباط ذاتي من رتبة أعلى.
3. لا يحتوي نموذج الانحدار الأصـــلي على المتغير التابع ذو الفجوة الزمنية كأحد متغيراته التفســـيرية: $y_t = a + B_1X_t + B_2y_{t-1} + e_t$
4. لابد أن تحتوي معادلة الانحدار الأصلي بالنموذج على معلمة تقاطعية (Intercept) أي تأخذ الصيغة التالية: $Y = a + B_1X_1 + B_2X_2 \ldots. + e$

خطوات اختبار دارين واتسون:

ويعتمد اختبار دارين واتسون على الخطوات التالية:

- تحديد الفروض:

✓ يشير إلى افتراض عدم وجود ارتباط ذاتي: $H0$

✓ يشير إلى افتراض وجود ارتباط ذاتي: H1

هناك نوعان من الاختبار ضمن إحصائية (d) لدربن، واتسون الأول اختبار من طرفين، والثاني اختبار من طرف واحد (الرشيد صفحة 212).

1) اختبار إحصائية دربن واتسون من طرفين:

-يتم في هذا الاختبار تحديد الفروض: $H_0: p = 0$ ضد الفرضية البديلة: $H_1: p \neq 0$

- ثم تقدير قيمة (d^*) بموجب الصيغة:

$$D.W = d^* = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t-1}^{n} e_t^2}$$

وذلك باحتساب الأخطاء العشوائية للنموذج المقدر وفق الصيغة: $e_t = Y_t - \widehat{Y}_t$

نقارن قيمة d^* المقدرة من انحدار البواقي مع قيمة (dL) و (dU) في جداول(D. W) بمستوى معنوية معين، فتظهر لنا إحدى الحالات الأربعة الآتية:

أ. عندما تكون $d^* < dL$ نرفض فرضية العدم ونقبل بالفرضية البديلة، وهذا يعني وجود ارتباط ذاتي موجب.

ب. عندما تكون $d^* > 4 - dL$ نرفض فرضية العدم، ونقبل بالفرضية البديلة وهذا يعني وجود ارتباط ذاتي سالب.

ج. عندما $d^* = 2$ أو $dU < d^* < 4 - dU$ نقبل بفرضية العدم وهذا يعني لا يوجد ارتباط ذاتي.

د. عندما $dL < d^* < dU$ أو $4 - dU < d^* < 4 - dU$ فإن الاختبار غير مؤكد Inconclusive لوقوع قيمة (d^*) في المنطقة غير الحاسمة، وتسمى هذه الطريقة للاختبار بالطريقة المطولة.

2) اختبار إحصائية دربن واتسون من طرف واحد:

تكون فرضية العدم وفق هذا الاختبار: $H_0: p \leq 0$ ضد الفرضية البديلة: $H_1: p > 0$

وبعد أن يتم تقدير قيمة (d^*) حسب الصيغة، تقارن تلك القيمة مع القيمتين الجدوليتين (dL) و(dU)

- فإذا كانت $d^* < dL$ ترفض الفرضية العدمية من أن $H_0: p = 0$، ونقبل بالفرضية البديلة $H_1: p \neq 0$
- أما إذا كانت $d^* > dU$ نقبل فرضية العدم $H_0: p = 0$ ونرفض الفرضية البديلة: $H_1: p \neq$
- أما إذا كانت $dL \leq d^* \leq dU$، فإن الاختبار يكون غير مؤكد، يلاحظ في هذا الاختبار، أننا نقوم باختبار وجود أو عدم وجود الارتباط الذاتي الموجب، لأننا نعمل من طرف واحد فقط، أي نختبر عندما تكون قيمة d^* واقعة بين (0) و (4)، مع عدم مراعاة إمكانية وجود ارتباط ذاتي سالب، أو منطقة غير حاسمة عندما: $4 - dL < d^* < 4 - dU$

ملحوظة:

1. إذا كانت قيمة $DW = 2$ فإن معامل الارتباط الذاتي للبواقي يساوي الصفر، وبالتالي ينعدم الارتباط الذاتي.
2. وإذا كانت قيمة $DW = 4$ فإن معامل الارتباط الذاتي يساوي سالب واحد، وبالتالي يوجد ارتباط ذاتي سالب.
3. أما إذا كانت قيمة $DW = 0$ فإن معامل الارتباط الذاتي يساوي موجب واحد، وبالتالي يوجد ارتباط ذاتي موجب.
4. كلما قلت $D.W$ مبتعدة عن 2 ومقتربة من Zero كلما زادت درجة الارتباط الذاتي الموجب، وكلما زادت مقتربة من 4 ومبتعدة من 2 كلما زادت درجة الارتباط الذاتي السالب.

نموذج تطبيقي: باستخدام بيانات حجم الإنفاق الاستهلاكي (Y) ومستوى الدخل المتاح للتصرف (Y) لإحدى الدول خلال الفترة (2000–2009):

السنة	الاستهلاك	الدخل
2000	70	80
2001	65	100
2002	90	120
2003	95	120

160	110	2004
180	115	2005
200	120	2006
220	140	2007
240	155	2009
260	150	2010

المطلوب: استخدام اختبار ديربن – واتسون لاكتشاف مشكلة الارتباط الذاتي للبواقي.

خطوات الحل:

1. تقدير النموذج باســـتخدام طريقة المربعات الصـــغرى (OLS) يتم تقدير نموذج الدخل، هو الانحدار، وذلك على النحو التالي: بافتراض أن x هو الدخل و y هي الاستهلاك.
2. إذًا معادلة الانحدار المقدرة هي: $\hat{y} = 24.47 + 0.509$

وباستخدام نتائج التقدير يمكن تكوين الجدور التالي:

الدخلx	y الاستهلاك	y	e	$e_i - 1$	$(e_i - e_i - 1)^2$	e^2
80	70	65.19	4.81	$-$		23.136
100	65	75.37	-10.37	-15.18	30.36	107.536
120	90	85.55	4.45	-5.92	11.84	19.802
140	95	95.73	-0.73	-11.1	22.2	0.5329
160	110	105.91	4.09	3.36	6.72	16.728
180	115	116.09	-1.09	-5.18	10.36	1.188
200	120	126.27	-6.27	-7.36	14.72	39.312
220	140	136.45	3.55	-2.72	5.44	12.602
240	155	146.63	8.19	4.64	9.28	70.056
260	150	156.81	-6.81	-15	30	46.376
$Total$					140.92	337.273

3. باستخدام الصيغة التالية:

$$DW = d^* = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t-1}^{n} e_t^2} = DW = d^* = \frac{140.92}{337.273} = 0.417$$

4. إيجاد قيمة (DW) الجدولية من الجدول الإحصائي لإحصائية (DW) عند مستوى معنوية 5%، وعدد المشاهدات $(N = 10)$، وعدد المتغيرات المستقلة $(K = 1)$ نجدها $(DL = 0.879$ و $DU = 1.32)$.

5. بمقارنة القيمة المحســـوبة بالقيمة الجدولية يتضـــح أن $(d^* < dL)(0.879 > {}^*0.417)$، وعليه نرفض فرضية العدم ونقبل بالفرضية البديلة، وهذا يعني وجود ارتباط ذاتي موجب.

اختبار h لاختبار درين: Durbin h Test:

نشـــر درين عام 1970 بحثاً لاختبار الارتباط الذاتي، عندما تكون بعض النماذج تحوي على متغيرات معتمدة ذات إبطاء زمني. ويمكن استخدام هذا الاختبار عندما $(n > 30)$ ويأخذ الاختبار الصيغة الاتية:

$$h^* = 1 - \frac{d^*}{2}\sqrt{\frac{n}{1 - n.v}} = \hat{P}\sqrt{\frac{n}{1 - n.v}}$$

حيث نجد أن (v) تمثل تباين معامل المتغير التابع ذي الإبطاء الزمني، ويطبق ذلك الاختبار فقط عندما يكون ذلك التباين صغيراً، بحيث إن $n.v < 1$.

إن قيمة الإحصائية (h) تكون موزعة طبيعيًا بمتوسط حسابي $= 0$ وتباين $= 1$ أي:

$$E(h^*) = 0 \quad , \quad E(h^{*2}) = \sigma_h$$

فإذا كانت فرضية العدم: $H_0: p \leq 0$ مقابل الفرضية البديلة: $H_1: p > 0$

وعند مقارنة قيمة (h^*) القيمة الجدولية (h^*) لـ(Z) الجدولية، والتي تساوي ± 1.64 عند مستوى معنوية 5% وتسـاوي ± 1.96عند مسـتوى معنوية 2.5%. فإذا كانت $h^* > Z$ ترفض فرضـية العدم وتقبل الفرضـية البديلة، أي أن هناك ارتباطاً ذاتيًا موجبًا من الدرجة الأولى.

أما إذا كانت فرضية العدم على الشكل الآتي: $H_0: p = 0$ مقابل الفرضية البديلة: $H_1: p \neq 0$

وعندما تكون $-1.96 \leq h^* \leq 1.96$ عند مســتوى معنوية 5%، نقبل بفرضـــية العدم، وهذا يعني عدم وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى.

ثانيًا: اختبارات الارتباط الذاتي من رتبة أعلى من الرتبة الأولى

إذًا الارتباط الذاتي من رتبة أعلى من الرتبة الأولى، فإن الاختبارات السابق إيضاحها لا تصلح للكشف عن مشكلة الارتباط الذاتي، ولذلك اقترحت اختبارات بديلة تتعامل مع هذه الرتب نجد من أهم هذه الاختبارات:

اختبار –برش – جود فيري Breusch-Godfrey (BG)

قدم هذا الاختبار Breusch و Godfire عام 1978، وهو يقترن باسـمهما أيضًـا (BG Test)، ويعتبر اختبار عام للارتباط الذاتي، أي معرفة درجة الارتباط الذاتي، ويسـتخدم للعينات الكبيرة، بحيث $n > 40$. ويتميز هذا الاختبار بالإضـافة إلى أنه يسـتخدم في الكشـف عن الارتباط الذاتي من رتبة أعلى من الأولى بعدة خصائص، أخرى، منها أنه لا يتأثر بظهور قيم المتغير التابع ذا الفجوة الزمنية كمتغير تفسيري، وفي هذه الحالة نجد أن:

$$U_t = P_i U_{t-1} + P_2 U_{t-2} + \cdots . + P_n U_{t-n}$$

وفقا لهذه الصـيغة يرتبط الحد العشـوائي بالفترة الحالية بالحدود العشـوائية بالفترات السـابقة حتى الفترة m، وفي هذه الحالة يكون فرض العدم هو: $H_0: P_1 - P_2 - \cdots - P_n - 0$

في مواجهة الفرض البديل أن كل المعاملات تختلف عن الصفر.

فبافتراض أن الاختبار للارتباط الذاتي للدرجة الرابعة، فإن حد الخطأ في أية فترة زمنية يعتمد على حدود الأخطاء في كل الفترات الزمنية الأربع السابقة كالآتي:

$$U_t = \rho_1 U_{t-1} + \rho_2 U_{t-2} + \rho_3 U_{t-3} + \rho_4 U_{t-4} + e_t$$

أن الفرضية العدمية تكون: $H_0: P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0$

والفرضـية البديلة هي: أن كل المعاملات تختلف عن الصـفر، فإذا كان الارتباط الذاتي من الدرجة الرابعة موجود فإن نموذج الانحدار يأخذ الصيغة الآتية:

$$\log y_t = \beta_1 + \beta_2 \log X_1 t + \beta_3 \log X_2 t + p_1 U_{t-1} + \cdots + p_1 U_{t-4} + et$$

وهذه المعادلة تعرف بالصـــيغة غير المقيدة Restricted form للنموذج، حيث يتبين أنه لا توجد قيود مفروضـــة على معالم النموذج، فإذا كانت فرضـــية العدم غير مرفوضـــة، فإن النموذج سـيكون معادلة انحدار كالآتي:

$$\log y_t = \beta_1 + \beta_2 \log X_1 t + \beta_3 \log X_2 t + et$$

وأن هذه المعادلة تعرف بالصـــيغة المقيدة Restricted form للنموذج، حيث يوجد أربعة قبود لمعالم النموذج (قيود صـفرية أربعة) محسـوبة للصـيغة غير المقيدة للنموذج. وباسـتخدام إحصـائية (F) ذات الصـيغة الآتية:

$$F = \frac{RSS_R - RSS_U / d}{RSS_U / n - k}$$

- عندما RSS تمثل مجموع مربعات البواقي المقيدة.

- $RSSu$ تمثل مجموع مربعات البواقي غير المقيدة.

وبمقارنتها بتوزيع (F الجدولية) يتم قبول أو رفض فرضية العدم.

اختبار فون نيومان Von Neumann Test:

يعتبر هذا الاختبار من الاختبارات النظرية، ويستخدم للعينات الكبيرة التي يكون فيها $n > 30$ ، ونسبة فون نيومان تأخذ الصيغة الآتية:

$$\frac{\delta^2}{S^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2/n-1}{\sum(e_t - e^-)^2/n} = \frac{n}{n-d}\frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^2} = \frac{n}{n-d}d$$

عندما:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^2}$$

حيث إن الصيغة الأخيرة تمثل اختبار .D. W.

فعند اختبار الارتباط الذاتي الموجب لعينة كبيرة، يتم مقارنة القيمة التجريبية Empirical value المتحصل عليها بواسطة نسبة فون نيومان بالمنطقة الحرجة قبل المختارة –pre selected من التوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين مناسبين لكن من المهم هنا أن يتم التأكيد على أن تساوي صيغة المتوسط والتباين يكون فقط صحيحًا عندما تكون قيم (e) موزعة باستقلالية، وأن هذا في الحقيقة غير صحيح لبواقي المربعات الصغرى، وعلى الوتيرة نفسها عندما تكون حدود الاضطراب الحقيقية موزعة باستقلالية، لذا فإن هذا الاختبار يعتبر اختبارًا نظريًا غير قابل للتطبيق

6.1 عـلاج مشكلة الارتباط الذاتي:

تتوقف الطريقة التي تعالج بها مشكلة الارتباط الذاتي للبواقي على سبب حدوث المشكلة، ولذلك يمكن اقتراح الأساليب التالية لعلاج المشكلة:

1. عندما يكون سبب هو حذف متغير أو بعض المتغيرات المستقلة، فالحل هو أن تدرج هذه المتغيرات المحذوفة في الدالة، ثم نعيد التقدير مرة أخرى.
2. عندما يكون سبب المشكلة هو سوء توصيف النموذج (الصياغة غير الدقيقة للنموذج)، فإن المعالجة تتوقف على إعادة صياغة النموذج المراد تقديره من واقع العلاقة. مثلا قد يكون النموذج الصحيح هو غير خطي، وقمنا بتقديره في الصورة الخطية، فإن الحل هو أن استخدام الصيغة الرياضية الصحيحة في التقدير.

3. أما إذا اتضح أن أحد من الأسباب السابقة ليس هو المؤدِّي إلى الارتباط الذاتي، وإنما السبب هو وجود علاقة فعليه بين قيم حد الخطأ، وبالتالي فإن معالجتها تتم بتحويل المتغيرات المستقلة بالشكل الذي تضمن التخلص من الارتباط الذاتي. وهنالك عدة طرق يمكن استخدامها لتحقيق ذلك، وهي:

أ- طريقة التكرار : لغرض معالجة مشكلة الارتباط الذاتي باستخدام طريقة التكرار، يتطلب الأمر تقدير النموذج على مرحلتين:

- يتم تقدير قيمة معامل الارتباط الذاتي $(\widehat{\mathrm{P}})$، وذلك بتقدير معاملات النموذج المراد دراسته.
- بعد ذلك نقوم باستبعاد أثر معامل الارتباط الذاتي من خلال احتساب قيم جديدة لكل من (Y_t) و (X_t)، ومن ثم تقدير قيمة دالة انحدار جديدة لـــ (Y_t^*) على (X_t^*)، يتم من خلالها تقدير قيمة درين واتسون (d^*) الجديدة، واختبار هذه القيمة لمعرفة وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي لهذا التقدير. فإذا كان هناك ارتباط ذاتي نعيد المعالجة من جديد وباتباع الخطوات نفسها للحصول على قيم ثانية جديدة بتحويل البيانات لكل من (Y_t^*) و (X_t^*)، والحصول على (Y_t^{**}) و (X_t^{**}) وهكذا إلى أن يتم معالجة هذه

ب- **طريقة الفرق الأول:** تفترض هذه الطريقة أن قيمة معامل الارتباط الذاتى $(\hat{P})$ يساوي الواحد الصحيح بشكل مسبق، وبالتالي تعتمد عند المعالجة استخدام الصيغة التالية:

$$\Delta \mathrm{Y}_t = \beta_1 \Delta \mathrm{Y}_t + \mathrm{et}$$

بعد أن نحصل على الفروق الأولى لكل من المتغيرين (Y_t) و (X_t) لاستخدامهما في الصيغة أعلاه، حيث إن:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$
$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

وبذلك نقوم بإجراء انحدار بين المتغيرين، كما في الصيغة: $Y_t^* = \beta_0 + \beta_0 X_t^* + e_t$

عندما: $Y_t^* = \Delta Y_t$ ، $X_t^* = \Delta X_t$

<u>تدريب (2)</u>: موضحًا أسباب الارتباط الذاتي للبواقي، عدّد أسباب وجود هذا الارتباط