منظومة المعادلات الآنية

The Simultaneous Equations System (SEM)

مقدمــة:

إنّ نموذج الانحدار الخطي الذي تم التطرق إليه في الفصول السابقة ونوقشت مشاكله في الفصل الثالث والرابع من هذا الكتاب، ما هو إلاَّ عبارة عن حالة خاصة من وضع عام، حيث افترض بموجبه أن هناك اتجاها وحيدًا للسببية، بمعنى أن مجموعة المتغيرات المستقلة $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ تؤثر في المتغير المعتمد (Y_i) ولا تتأثر به، في حين الحالة العامة لمعظم العلاقات الاقتصادية تنطوي على الاعتماد المتبادل بين المتغيرات الداخلة في النموذج، أي أن هناك على الأقل عدد من المتغيرات تتحدد آنيا، تؤثر وتتأثر ببعضها البعض.

فعلى سبيل المثال الاستهلاك يؤثر في الدخل ويتأثر به في الوقت ذاته، ومن ثم فلا مجال للقول بأن دالة الاستهلاك تقف بمعزل عن غيرها من العلاقات التي تحدد الدخل والاستثمار. كذلك الأجور لا تتحدد بمعزل عن الأسعار ولا تتحدد الأسعار بمعزل عن الأجور، وإنما يتحدد الاثنان سوية ضمن منظومة متعددة المعادلات.

في ضوء ما ذكر أعلاه، يمكن القول بأن نموذج الانحدار السابق الذكر يفتقر إلى الواقعية نظرًا لافتراضه اتجاهًا وحيدًا للسببية بين مجموعة المتغيرات المستقلة والمتغير المعتمد، عليه فالمعالجة الصحيحة لمعظم الظواهر الاقتصادية تقتضي صياغتها في صورة مجموعة متداخلة من العلاقات بهيئة منظومة معادلات آنية.

2. فروض منظومة المعادلات الآنية:

بشكلٍ عام يمكن تعريف منظومة المعادلات الآنية، بأنها منظومة من المعادلات التي يكون المتغير المعتمد لواحد أو أكثر من معادلاتها متغيرًا مستقلاً في معادلة أو أكثر من معادلة ضمن المنظومة. وتدعى المتغيرات المعتمدة في منظومة المعادلات الآنية بالمتغيرات الداخلية (Endogenous Variables)، حيث يقابل كل متغير داخلي في المنظومة معادلة واحدة، وبهذا فإن عدد المعادلات في منظومة المعادلات الآنية ينبغي أن يساوي عدد المتغيرات الداخلية، أما فيما يتعلق بالمتغيرات الخارجية (Exogenous Variables) فإن عددها لا يتحدد بعدد المتغيرات الداخلية، وإنما يتوقف ذلك على طبيعة العلاقة بين مختلف معادلات المنظومة، فقد يحدث أن تكون بعض المتغيرات المستقلة (الخارجية) في المنظومة متغيرات داخلية والتي بدورها تعتمد على قيم الحدود العشوائية في المنظومة، وهو أمر يتناقض مع الافتراض الخاص بنموذج الانحدار العام والذي ينص على استقلالية العلاقة ما بين قيم المتغيرات المستقلة وقيم الحدود العشوائية (كاظم الحسناوي، 2002 صفحة 299). ويمكن توضيح ذلك من خلال النموذج الكينزي البسيط التالي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + U_t$$
$$X_t = X_t + Z_t \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

حيث أن: Y_t تمثل الاستهلاك، X_t تمثل الدخل، Z_t تمثل الاستثمار

المعادلة الأولى من المنظومة أعلاه تعرف بدالة الاستهلاك، حيث ظهر فيها متغير عشوائي (U_t) كعنصر خطأ. أما المعادلة الثانية فتعرف بأنها متطابقة أو علاقة تعريفية، وهي محدّدة ولا يوجد فيها عنصر خطأ.

إذا كان هناك استقلال بين المتغير المستقل (X_t) والمتغير العشوائي (U_t)، عندها يمكن تطبيق طريقة (OLS) للحصول على تقديرات غير متحيزة لمعالم دالة الاستهلاك، ولكن مثل هذا الشرط غير متحقق في المنظومة أعلاه، وذلك لأن المتغير (X_t) لا يمكن اعتباره متغيرًا خارجيًا في دالة الاستهلاك لارتباطه بعنصر الخطأ العشوائي (U_t) في هذه الدالة، ويتضح ذلك بشكل جلي عند التعويض عن قيمة (Y_t) بما يساويها في المعادلة الثانية من المنظومة أعلاه.

$$X_t = (\beta_0 + \beta_1 X_t + U_t) + Z_t$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على:

$$X_t - \beta_1 X_t = \beta_0 + Z_t + U_t$$

$$\therefore X_t(1 - \beta_1) = \beta_0 + Z_t + U_t$$

$$\therefore X_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{Z_t}{1-\beta_1} + \frac{U_t}{1-\beta_1} \dots\dots\dots\dots (2)$$

يتبين من الصيغة رقم (2) أعلاه أن الدخل (X_t) دالة في عنصر الخطأ العشوائي (U_t) في دالة الاستهلاك، بعبارة أخرى:

$$cov(X_t U_t) \neq 0$$

وذلك لأن:

$$cov(X_t U_t) = E\big[\big(X_t - E(X_t)\big)(U_t - E(U_t)\big]$$

وبالتعويض عن القيمة المتوقعة لـ (X_t)، وعلى افتراض $E(U_t) = 0$

$$\therefore cov\,(X_t U_t) = E\left[\left(X_t - \left(\frac{\beta_0}{1-\beta_1}\right) - \left(\frac{1}{1-\beta_1}\right) Z_t\right) U_t\right]$$

وبالتعويض عن (X_t) بما يساويها من (2):

$$cov\,(X_t U_t) = E\left[\left(\frac{1}{1-\beta_1}\right) U_t . U_t\right] = \left(\frac{1}{1-\beta_1}\right) E(U_1^2) = \left(\frac{1}{1-\beta_1}\right) \sigma_u^2$$

النتيجة أعلاه غير صفرية، ويستدل منها بعدم إمكانية تطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معالم دالة الاستهلاك، أي أن تقدير معالم دالة الاستهلاك باستخدام (OLS) المعادلات الآنية سوف يكون متحيزا وغير متسقا، لذا يستوجب اللجوء إلى طرق أخرى لتقدير معالم منظومة المعادلات الآنية.

الفرض أعلاه يوضح حالة بسيطة للتشابك بين متغير خارجي واحد والخطأ العشوائي في منظومة متضمنة علاقتين فقط، بشكل عام وفي حالة توفر (K) من المتغيرات الخارجية في منظومة متضمنة (G) من المعادلات، عندها يمكن استخدام أسلوب المصفوفات لبيان الفروض الواجب توفرها عند بناء منظومة المعادلات الآنية للظواهر المختلفة، ولتوضيح ذلك دعنا ندرس منظومة المعادلات التالية والمعاد ترتيب حدودها بالشكل التالي:

$$\beta_{11} y_{1t} + \beta_{12} y_{2t} + \cdots \beta_{1G} y_{Gt} + \gamma_{11} X_{1t} + \gamma_{12} X_{2t} + \cdots . + \gamma_{1k} X_{kt} = U_{1t}$$

$$\beta_{21}y_{1t} + \beta_{22}y_{2t} + \cdots \beta_{2G}y_{Gt} + \gamma_{21}X_{1t} + \gamma_{22}X_{2t} + \cdots . + \gamma_{2k}X_{kt} = U_{2t}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\beta_{G1}y_{1t} + \beta_{Gt}y_{2t} + \cdots \beta_{GG}y_{Gt} + \gamma_{G1}X_{1t} + \gamma_{G2}X_{2t} + \cdots . + \gamma_{Gk}X_{kt} = U_{Gt} \ldots . . (3)$$

حيث أن:

: تمثل المتغيرات الداخلية، X^s تمثل المتغيرات الخارجية

: تمثل الأخطاء العشوائية

: تمثل معالم المنظومة الخاصة بالمتغيرات الداخلية والخارجية على التوالي.

G: تمثل عدد المتغيرات الداخلية، k *تمثل عدد المتغيرات الخارجية*

مجموعة المعادلات رقم (3) أعلاه، تمثل منظومة معادلات آنية. وفيها المتغير المعتمد لواحد أو أكثر من معادلاتها متغيرًا مستقلاً في معادلة أخرى أو أكثر من معادلة ضمن تلك المجموعة من المعادلات، بعبارة أخرى أن بعض المتغيرات المعتمدة تكون كمتغيرات تفسيرية مرتبطة بمتغيرات معتمدة أخرى، علمًا بأن منظومة المعادلات الآنية تكون على أنواع، منها منظومة المعادلات الترددية (Recursive Equations System) والتي يمكن إيجاد (تحديد) المتغيرات الداخلية فيها بالتعاقب. وهناك نوع آخر من المنظومات الآنية تعرف بمنظومة المعادلات القطاعية – الترددية (Block – Recursive Equations System) والتي فيها مجموعة المعادلات يمكن تجزئتها إلى مجموعات أو قطاعات من المعادلات بحيث تكون المعادلات محدّدة آنيًا في كل قطاع وأن مجموع المعادلات عبر القطاعات تأخذ صفة منظومة معادلات ترددية، بحيث أن المعلومات عن المتغيرات الداخلية في القطاع الأول على سبيل المثال تساعد على تحديد المتغيرات الداخلية في القطاع الثاني وهكذا...

فضلاً عن ذلك فإن، هناك حالة خاصة من منظومة المعادلات الآنية وفيها لا يظهر أي تداخل (تشابك) بين متغيراتها الداخلية والخارجية ولكن لا يزال هناك تداخل بين معادلاتها السلوكية وذلك نتيجة لترابط الأخطاء العشوائية بين المعادلات المختلفة، هذا النوع يعرف بمنظومة معادلات انحدار غير مرتبطة ظاهريا (SURE)، (Seemingly Unrelated Regression Equations) وفيها مجموعة المعادلات قد تكون مرتبطة إحصائيًا حتى ولو أنها لا تبدو كذلك هيكليًا. باستخدام المصفوفات والموجهات وكالآتي: مرة أخرى بالرجوع إلى منظومة المعادلات الآنية رقم (3)، حيث يمكن إعادة كتابته باستخدام المصفوفات والموجهات وكالآتي:

$$\beta Y_t + \Gamma X_t = U_t \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . (4)$$

الصيغة رقم (4) أعلاه تعرف بالشكل الهيكلي أو النموذج الهيكلي (Structural model) وكل معادلة هيكلية فيه تعبر عن أحد المتغيرات الداخلية بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية وكذلك المتغيرات الداخلية المرتدة زمنيًا إن وجدت، علمًا بأن كل من: U_t, X_t, Y_t تمثل موجهات في حين β و Γ تمثل مصفوفات وبالشكل التالي:

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{Gt} \end{bmatrix} \ , \ X_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{kt} \end{bmatrix} \ , \qquad U_t = \begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \\ \vdots \\ U_{Gt} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1G} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2G} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \cdots & \beta_{GG} \end{bmatrix} \ , \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \cdots & \gamma_{Gk} \end{bmatrix}$$

وأن موجه خطأ المنظومة U_t يخضع للفرض التالي: $U_t \sim (0, \phi)$

وبمصفوفة تباين وتباين مشترك للأخطاء العشوائية كالآتي:

$$Var - Cov(U_t) = E(U_t U_t') = \phi = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1G} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2G} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{G1} & \sigma_{G2} & \cdots & \sigma_{GG} \end{bmatrix}$$

قطر المصفوفة أعلاه، يمثل التباين للأخطاء العشوائية في مختلف معادلات المنظومة، أمّا العناصر خارج نطاق قطر المصفوفة فتمثل التباين المشترك بين أخطاء كل معادلتين من معادلات المنظومة الآنية.

3. التشخيص والاختزال:

تعد مشكلة التشخيص (Identification) من المشاكل الأساسية لبناء النماذج القياسية، ونقصد بالتشخيص اختبار كل معادلة من معادلات المنظومة من حيث صياغتها بشكل نهائي وبدون إهمال أي متغير أساسي أو ثانوي فيها، وبالتالي بيان الأسلوب الملائم لتقدير معالم المنظومة تحت البحث، ولغرض توضيح الفكرة الأساسية للتشخيص دعنا ندرس منظومة العرض والطلب التالية:

$$D = A_0 + A_1 P + U_1$$
$$S = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 W + U_2$$
$$S = D$$

حيث أن:

(D) تمثل الكمية المطلوبة، (S) تمثل الكمية المعروضة، (P) تمثل السعر،

(W) تمثل الرقم القياسي لحالة الجو،

وأن (P, S, D) تعرف بالمتغيرات الداخلية و(W) يمثل متغير خارجي.

كل معادلة هيكلية في منظومة المعادلات أعلاه تعبر عن أحد المتغيرات الداخلية بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية وكذلك المتغيرات الداخلية المرتدة زمنيًا (Lagged endogenous variables) ومعالم النموذج الهيكلي تسمى بالمعالم الهيكلية (Structural Parameters). وبالرجوع إلى النموذج الهيكلي أعلاه،

حيث يمكن اشـــتقاق نموذجٍ آخر، وذلك بالتعبير عن كل متغير داخلي فيه بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة[1] زمنيًا إن وجدت، بما أن $S = D$:

$$A_0 + A_1P + U_1 = \beta_0 + \beta_1P + \beta_2W + U_2$$
$$\therefore P = (A_1 - \beta_1) = \beta_0 - A_0 + \beta_2W + U_2 - U_1$$
$$P = \frac{\beta_0 - A_0}{A_1 - \beta_1} + \frac{\beta_2}{A_1 - \beta_1}W + \frac{U_2 - U_1}{A_1 - \beta_1} \dots\dots\dots (5)$$ ومنه:

بتعويض ذلك في دالة العرض أو الطلب نحصل على:

$$D = A_0 + A_1\left(\frac{\beta_0 - A_0}{A_1 - \beta_1} + \frac{\beta_2}{A_1 - \beta_1}W + \frac{U_2 - U_1}{A_1 - \beta_1}\right) + U_1$$
$$\therefore D = S = \frac{A_1\beta_0 - A_1\beta_1}{A_1 - \beta_1} + \frac{A_1\beta_2}{A_1 - \beta_1} + W\frac{A_1U_2 - U_1\beta_1}{A_1 - \beta_1} \dots\dots\dots (6)$$

الصـيغتين أعلاه رقم (5) و (6) والمشـتقتين من النموذج الهيكلي تسـمى بالنموذج المختزل (Reduce Form Model)، وظهرت فيه المتغيرات الداخلية كدالة في المتغيرات الخارجية، فضـلاً عن عنصـر الخطأ وبمقارنة معالم النموذج الهيكلي بمعالم النموذج المختزل، يتضـــح أن معالم النموذج المختزل ما هي إلاَّ دوال لمعالم النموذج الهيكلي، وكذلك الحال بالنسبة لعنصـر الخطأ العشـوائي، علمًا بأنَّ معالم النموذج الهيكلي تقيس الأثر المباشـر للمتغير المسـتقل (داخليًا كان أو خارجيًا) على المتغير الداخلي، في حين معالم النموذج المختزل تقيس الأثر الكلي، أي الأثر المباشـر والأثر غير المباشـر للمتغير في المتغيرات المسـتقلة (خارجية كانت أو داخلية مرتدة زمنيًا) على كل متغير داخلي (كاظم الحسناوي، 2002 صفحة 305).

يتضح من الصيغتين أعلاه أن معالم النموذج المختزل تأخذ بنظر الاعتبار التشابك (الترابط) المتبادل بين المتغيرات الداخلية، فعلى سـبيل المثال زيادة وحدة واحدة في المتغير (W) يؤدي في النموذج المختزل إلى زيادة في السعر قدرها $(\beta_2/(A_1 - \beta_1))$ وزيادة فـي العرض أو الطلب مقدارها $(\beta_2A_1/(A_2 - \beta_1))$ ومثل هذه الخاصية لها فائدة كبيرة في التنبوء وتحليل السياسات، وذلك لأن ما يهم واضـع السياسة هو الأثر الكلي وليس فقط الأثر المباشر لتغير المتغيرات الخارجية على المتغيرات الداخلية.

وبإعادة كتابة النموذج المختزل:

$$P = \Pi_{11} + \Pi_{12}W + V_1$$
$$D = S = \Pi_{21} + \Pi_{22}W + V_2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

حيث أن:

$$\Pi_{11} = \frac{\beta_0 - A_0}{A_1 - \beta_1}, \qquad \Pi_{12} = \frac{\beta_2}{A_1 - \beta_1}, \qquad V_1 = \frac{U_2 - U_1}{A_1 - \beta_1}$$

[1] - في مثالنا هذا، يمكن أن يكون المتغير (P) متغيرًا داخليًا مرتدًا زمنيًا بسنة واحدة (P_{t-1}) أو بسنتين (P_{t-2}) وهكذا...

$$\Pi_{21} = \frac{A_1\beta_0 - A_0\beta_1}{A_1 - \beta_1}\,, \qquad \Pi_{22} = \frac{\beta_2 A_1}{A_1 - \beta_1}\,, \qquad V_2 = \frac{A_1 U_2 - U_1\beta_1}{A_1 - \beta_1}$$

حيث يمكن استخدام طريقة (OLS) بشكل غير مباشر لتقدير معالم منظومة العرض والطلب أعلاه، وذلك في حالة تحقق الشـروط اللازمة لتشـخيص كل معادلة من معادلاته. ويقصـد بشـرط التشـخيص هو إمكانية الحصـــول على تقدير وحيد لمعالم النموذج الهيكلي من تقديرات معالم النموذج المختزل، وعندها يكون النموذج تحت البحث مشـــخصًـــا تمامًا (Just Identify). أما إذا لم يكن النموذج الهيكلي مشـــخّصًا (Under Identify) فإن ذلك يعني عدم إمكانية الحصول على تقديرات وحيدة للمعالم الهيكلية من تقديرات معالم النموذج المختزل، وفي الحالة التي يكون فيها هناك إمكانية للحصـول على عدة قيم من النموذج المختزل لكل معلمة من معالم النموذج الهيكلي، عندها ســـوف لن يكون هناك تقدير وحيد لهذه المعالم وبالتالي يكون النموذج المدروس فوق التشخيص (Over Identify)، وسنفرد القسم التالي من هذا الفصل لتوضيح هذه الاستنتاجات.

الآن وفي حالة مثالنا الســـابق، نلاحظ من نموذج الاختزال رقم (7)، يمكن الوصـــول إلى تقديرات وحيدة لمعالم دالة الطلب (A_1, A_0) في النموذج الهيكلي وكالآتي:

$$A_1 = \frac{\Pi_{22}}{\Pi_{12}}\,, \quad A_0 = \Pi_{21} - \frac{\Pi_{22}}{\Pi_{12}}\,\Pi_{11}$$

وهذا بدوره يعني أن دالة الطلب مشخصة، أما معالم دالة العرض $\beta_2, \beta_1\,, \beta_0$ فلا يمكن تقديرها من خلال معالم النموذج المختزل، وعليه فهي دالة غير مشـخصـة وبالتالي منظومة العرض والطلب ككل غير مشـخصـة ويجب النظر بإعادة بنائها.

وبالرجوع إلى النظرية الاقتصادية وبالذات إلى مفهوم دالة الطلب، نجد أن الطلب ما هو إلا دالة في السعر والدخل وليس فقط في السعر كما ورد في المعادلة الأولى من المنظومة، وعليه يستوجب إعادة صياغة منظومة العرض والطلب بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} D &= A_0 + A_1 P + A_2 Y + U_1 \\ S &= \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 W + U_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8) \\ D &= S \end{aligned}$$

حيث أن:

(Y) تمثل الدخل، وبقية المتغيرات تأخذ نفس التعريف الســـابق. النموذج الهيكلي أعلاه مكون من ثلاثة معادلات بثلاثة متغيرات داخلية $P, S\,, D$ ويحتوي على متغيرين خارجيين هما الدخل (Y) وحالة الجو (W)، ولغرض تشـــخيص كل معادلة من معادلاته لا بد من إيجاد الصـــيغة المختزلة له، أي التعبير عن كل متغير داخلي بدلالة المتغيرات الخارجية وذلك يتم بالإحلال المتتابع وكالآتي:

$$A_0 + A_1 P + A_2 Y + U_1 = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 W + U_2$$
$$\therefore P(\beta_1 - A_1) = A_0 - \beta_0 + A_2 Y - \beta_2 W + U_1 - U_2$$

$$\therefore P = \frac{A_0 - \beta_0}{\beta_1 - A_1} + \frac{A_2}{\beta_1 - A_1} Y - \frac{\beta_2}{\beta_1 - A_1} W + \frac{U_1 - U_2}{\beta_1 - A_1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

وبالتعويض في معادلة العرض أو الطلب نحصل على:

$$D = A_0 + A_1 P + A_2 Y + U_1$$

$$D = A_0 + A_1 \left(\frac{A_0 - \beta_0}{\beta_1 - A_1} + \frac{A_2}{\beta_1 - A_1} Y - \frac{\beta_2}{\beta_1 - A_1} W + \frac{U_1 - U_2}{\beta_1 - A_1} \right) + A_2 Y + U_1$$

$$\therefore D = \frac{A_0\beta_1 - A_1\beta_0}{\beta_1 - A_1} + \frac{A_2\beta_2}{\beta_1 - A_1} Y - \frac{A_1\beta_2}{\beta_1 - A_1} W + \frac{U_1\beta_1 - U_2 A_1}{\beta_1 - A_1} = S \dots\dots\dots (10)$$

الصيغة (9) و (10) يمثلان الشكل المختزل للنموذج الهيكلي والذي يمكن إعادة كتابته بالشكل التالي:-

$$\begin{matrix} D = S = \Pi_{10} + \Pi_{11} Y + \Pi_{12} W + V_1 \\ P = \Pi_{20} + \Pi_{21} Y + \Pi_{22} W + V_2 \end{matrix} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (11)$$

حيث أن:

$$\Pi_{10} = \frac{A_0\beta_1 - A_1\beta_0}{\beta_1 - A_1}, \quad \Pi_{11} = \frac{A_2\beta_1}{\beta_1 - A_1}, \quad \Pi_{12} = \frac{-A_1\beta_1}{\beta_1 - A_1},$$

$$V_1 = \frac{U_1\beta_1 - U_2 A_1}{\beta_1 - A_1}, \quad \Pi_{20} = \frac{A_0 - \beta_0}{\beta_1 - A_1}, \quad \Pi_{21} = \frac{A_2}{\beta_1 - A_1}$$

$$\Pi_{22} = \frac{-\beta_2}{\beta_1 - A_1}, \quad V_2 = \frac{U_1 - U_2}{\beta_1 - A_1}$$

وبملاحظة النموذج المختزل أعلاه رقم (11)، نجد أن هناك إمكانية لتقدير معالم دالة الطلب في النموذج الهيكلي وعلى النحو التالي:

$$A_0 = \Pi_{20} \left(\frac{\Pi_{10}}{\Pi_{20}} - \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}} \right), \quad A_1 = \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}$$

$$A_2 = \left(\frac{\Pi_{11}}{\Pi_{21}} - \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}} \right) \Pi_{21} = \Pi_{11} - \frac{\Pi_{12}\Pi_{21}}{\Pi_{22}}$$

وبما أن هنالك ستة علاقات مستنبطه من النموذج المختزل تمثل ستة معالم في النموذج الهيكلي أي أن هناك تقديرات وحيدة لمعالم المنظومة الهيكلي وبالتالي فإن كل من دالة الطلب والعرض مشخصة والمنظومة ككل مشخصة تمامًا، حيث يمكن تطبيق (OLS) بشكل غير مباشر لتقدير معالم النموذج الهيكلي وذلك عن طريق تقدير معالم النموذج المختزل أولا ثم استخدام العلاقات الستة أعلاه لتقدير المعالم الهيكلية A_2, A_1, A_0 و $\beta_2, \beta_1, \beta_0$ وهذا الأسلوب في التقدير يعرف بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (Indirect Least Square، (ILS) .

4- الشروط الأساسية للتشخيص:

لقد تطرقنا في الجزء (3-10) من هذا الفصل إلى مناقشة مشكلة التشخيص، وقد اتضح بأن تشخيص أي معادلة هيكلية يتطلب إيجاد الاختزال لها أولاً، في الواقع ليس ضروري أن نختزل المعادلة الهيكلية في كل مرة

لغرض تشـــخيصـــها، فهناك قاعدة عامة يمكن اســـتخدامها لهذا الغرض دون اللجوء إلى الاختزال وتتمثل هذه القاعدة بتحقق الشرطين التاليين:

1- شرط الترتيب Order Condition

2-شرط الرتبة Rank Condition

الشـرط الأول ضـروري ولكنه غير كافٍ لتشـخيص أي معادلة هيكلية من معادلات المنظومة، لذا وتأكيدًا للاختبار الأول يستوجب اجتياز المعادلة شرط الاختبار الثاني.

بشـكل عام تكون المعادلة مشـخّصـة بموجب الشـرط الأول، عندما يكون عدد المتغيرات المسـتبعدة منها ولكنها داخلة في المعادلات الأخرى للنموذج الهيكلي مســـاويًا لعدد معادلات المنظومة مطروحًا منه واحد. فإذا كان عدد معادلات المنظومة الهيكلية (G)، وعدد المتغيرات سواءٌ كانت خارجية أو داخلية أو داخلية مرتدة زمنيًا في النموذج الهيكلي مساوية إلى (K)، وعدد المتغيرات في المعادلة محل الاختبار مساوية إلى (M). فإن شرط الترتيب لتشخيص هذه المعادلة يأخذ الصيغة التالية: $K - M \geq G - 1$

فإذا كانت$K - M = G - 1$ تكون المعادلة مشخصة تماما (Exactly or Just Identified).

أما إذا كانت $K - M > G - 1$ تكون المعادلة فوق التشخيص (Over Identified)

وأخيرًا في حالة $K - M < G - 1$ عندها تكون المعادلة غير مشخصـة أو تحت التشـخيص (Under Identified)

ولغرض تأكيد المرحلة الأولى من الاختبار، لا بد من إجراء الاختبار الثاني والمتمثل بشـــرط الرتبة الذي يلخص بالشكل التالي، ترتب كافة المعالم الهيكلية بدلالة جميع المتغيرات في المنظومة، ثم تؤخذ المعالم المقابلة للمعالم المفقودة في المعادلة المطلوب اختبارها وتوضـع بشـكل مصـفوفة، بعدها نجد قيمة محدد هذه المصـفوفة والتي تكون ذات رتبة $(G - 1)$، فإذا كانت قيمة محددها لا يساوي صفرًا تكون المعادلة مشخصة، وبخلافه أي إذا كانت قيمة المحدد مسـاوية للصـفر، عندها توصـف المعادلة موضـع البحث بأنها غير مشـخصـة تحت التشـخيص). أما إذا حدث وأن كانت المصـفوفة المسـتخرجة من المعالم الهيكلية غير مربعة، عندها يسـتوجب تجزئتها إلى كافة المصـفوفات الجزئية الممكنة وذات الرتبة $(G - 1)$، فإذا كانت على الأقل واحدة من قيم هذه المحددات لا يسـاوي صـفرًا تكون المعادلة مشـخصـة، أما إذا كانت كافة قيم المحددات ذات الرتبة $(G - 1)$ مساوية إلى الصفر، فإن المعادلة سوف تكون غير مشخصة.

وبالرجوع إلى مثالنا السـابق والذي تم اختزاله، والمتعلق بمنظومة العرض والطلب والمتكون من معادلتين ومتطابقة، فلغرض تشخيص كل معادلة من معادلاته، يستوجب إعادة كتابته بالشكل التالي:

$$-D + A_0 + A_1 P + A_2 Y + U_1 = 0$$
$$-S + \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 W + U_2 = 0$$
$$-D + S = 0$$

ثم نرتب كافة المعالم للمنظومة أعلاه، بدلالة كافة المتغيرات ســـواءٌ كانت متغيرات داخلية أو خارجية أو داخلية مرتدة زمنيًا وكالآتي:

المعادلـــة	المتغيـــــــــــــرات					
	1	D	S	P	Y	W
(1)	A_0	-1	0	A_1	A_2	0
(2)	β_0	0	-1	β_2	0	β_2
(3)	0	-1	1	0	0	0

شروط الترتيب Order Condition:

$$K - M \geq G - 1$$

$$K = 5 \ , \ G = 3$$

بالنسبة للمعادلة الأولى: $5 - 3 = 3 - 1$، المعادلة مشخّصة تمامًا

بالنسبة للمعادلة الثانية $5 - 3 = 3 - 1$، المعادلة مشخّصة تمامًا

شرط الرتبة Rank Condition :

بالنسبة للمعادلة الأولى: $\begin{bmatrix} -1 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \therefore \begin{vmatrix} -1 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\beta_2$

فإذا كانت قيمة (β_2) لا تساوي صفر، فإن المعادلة الأولى تكون مشخصة تمامًا.

بالنسبة للمعادلة الثانية: $\begin{bmatrix} -1 & A_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \therefore \begin{vmatrix} -1 & A_2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = A_2$

فإذا كانت قيمة (A_2) لا تساوي صفر، فإن المعادلة الثانية تكون مشخصة تمامًا.

تجدر الإشارة هنا إلى أن المنظومة الهيكلية تكون غير مشخصة، إذا كانت واحدة أو أكثر من معادلاتها غير مشـــخصـــة، وهذا النوع من النماذج الهيكلية لا يمكن تقدير معالمه بأي أســـلوب من أســـاليب القياس الاقتصادي، أما إذا كانت كافة معادلات المنظومة مشخصة تمامًا عندها تكون المنظومة ككل مشخصة تمامًا وبالتالي يمكن تقدير معالمها الهيكلية بموجب طريقة المربعات الصـــغرى غير المباشـــرة (Indirect Least Square) (ILS) أو طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (2SLS) (Two Stage Least Square) أو طريقة المتغيرات المساعدة (IV) (Instrumental Variable) أو طريقة الإمكان الأعظم ذات المعلومات المحدودة (LIML) Limited Information Maximum Likelihood) وأخيرًا إذا كانت معادلات المنظومة فوق التشخيص، فإن معالمها الهيكلية يمكن أن تقدر بإحدى الأساليب القياسية التالية:

a- طريقة المربعات الصغرى ذات الثلاث مراحل (3SLS) (Three Stage Least Square).

b- طريقة الإمكان الأعظم ذات المعلومات الكاملة (التامة) (Full Information Maximum Likelihood) (FIML)

تجدر الإشارة هنا إلى أن الطريقتين الأخيرتين تسمى بطرق المنظومة، لكون التقدير بموجبها يتم أنيًا وعلى مستوى كافة معادلات المنظومة، في حين الطرق الأربعة الأولى تعرف بطرق أحادية المعادلة، وذلك لإمكانية تطبيقها لتقدير معالم كل معادلة من معادلات المنظومة على انفراد (كاظم الحسناوي، 2002 صفحة 310).

مثال تطبيقي:

شخّص كل معادلة من معادلات المنظومة التالية:

$$Y_1 = 3Y_2 - 2X_1 + X_2 + U_1$$
$$Y_1 = Y_1 + X_3 + U_1$$
$$Y_3 = Y_1 - Y_2 - 2X_3 + U_3$$

علمًا بأن $Y_1,\ Y_2,\ Y_3$ متغيرات داخلية، و$X_1,\ X_2,\ X_3$ متغيرات خارجية.

الحل: نعيد كتابة النموذج الهيكلي بعد دمج المتغيرات الداخلية مع المتغيرات الخارجية كالآتي:

$$-Y_1 + 3Y_2 - 2X_1 + X_2 + U_1 = 0$$
$$-Y_2 + Y_3 + X_3 + U_1 = 0$$
$$-Y_3 + Y_1 - Y_2 - 2X_3 + U_3 = 0$$

وبإهمال الأخطاء العشوائية وإعادة كتابة المعالم الهيكلية بدلالة كافة المتغيرات في المنظومة نحصل على:

المعادلة	المتغيرات					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
(1)	-1	3	0	-2	1	0
(2)	0	-1	1	0	0	1
(3)	1	-1	-1	0	0	-2

أولًا: اختبار شرط الترتيب

صيغة الاختبار: $K - M \geq G - 1$

حيث أن: $K = 6\ ,\ G = 3$

بالنسبة للمعادلة الأولى: $2 = 2$، المعادلة مشخصة تمامًا.

بالنسبة للمعادلة الثانية $2 < 3$، المعادلة فوق التشخيص.

بالنسبة للمعادلة الثالثة: $2 = 2$، المعادلة مشخصة تمامًا.

ثانيا: اختبار شرط الرتبة

بالنسبة للمعادلة الأولى: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

وبما أن محدّد هذه المصفوفة مساويًا إلى (-1)، إذًا المعادلة مشخصة بشكل نهائي.

بالنسبة للمعادلة الثانية: $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

وبما أن المصفوفة غير مربعة، لذا يجب تجزئتها على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبإيجاد قيم محدد المصفوفات المجزئة أعلاه نحصل على:

قيمة محدد المصفوفة الأولى مساويًا إلى (2)، وقيمة محدد المصفوفة الثانية مساويًا إلى (-1) أما محدد المصفوفة الثالثة فيساوي صفر. وبما أن هناك على الأقل واحد من قيم المحددات للمصفوفة المجزأة لا يساوي صفر، إذًا المعادلة الثانية مشخصة بشكل نهائي.

بالنسبة للمعادلة الثالثة: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

وبما أن قيمة محدد المصفوفة يساوي صفر، إذًا المعادلة غير مشخصة.

<u>مثال تطبيقي (2):</u> شخّص كل معادلة من معادلات المنظومة التالية:

$$C_t = A_0 + A_1 Y_t + A_2 C_{t-1} + U_{1t}$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_2 I_{t-1} + U_{2t}$$
$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 M_t + U_{3t}$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

حيث أن: R_t, I_t, Y_t, G_t تمثل الاستهلاك، الدخل القابل للتصرف، الاستثمار، سعر الفائدة على التوالي، وتمثل متغيرات داخلية، أما M و G تمثل السعر الجاري والنفقات الحكومية على التوالي، وهي متغيرات خارجية.

$\mathrm{I}_{t-1}, C_{t-1}$ تمثل متغيرات داخلية مرتدة بسنة واحدة.

<u>الحل</u>:

نعيد كتابة النموذج الهيكلي أعلاه، بعد دمج المتغيرات الداخلية مع الخارجية وكذلك مع المتغيرات الداخلية المرتدة زمنيًا.

$$-C_t + A_0 + A_1 Y_t + A_2 C_{t-1} + U_{1t} = 0$$
$$-I_t + \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_2 I_{t-1} + U_{2t} = 0$$
$$-R_t + \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 M_t + U_{3t} = 0$$
$$-Y_t = C_t + I_t + G_t =$$

وبإهمال الأخطاء العشوائية وإعادة كتابة المعالم بدلالة كافة المتغيرات نحصل على:

المعادلـــة	المتغيـــــــــــــرات								
	C_t	I_t	R_t	Y_t	1	C_{t-1}	L_{t-1}	M_t	G_t
(1)	-1	0	0	A_1	A_0	A_2	0	0	0
(2)	0	-1	β_1	0	β_1	0	β_2	0	0
(3)	0	0	-1	γ_1	γ_0	0	0	γ_2	-2
(4)	1	1	0	-1	0	0	0	0	1

أولاً: اختبار شرط الترتيب

صيغة الاختبار: $K - M \geq G - 1$

حيث أنّ: $K = 8\ ,\ G = 4$

بالنسبة للمعادلة الأولى: $3 < 5$، المعادلة فوق التشخيص

بالنسبة للمعادلة الثانية: $3 < 5$، المعادلة فوق التشخيص

بالنسبة للمعادلة الثالثة: $3 < 5$، المعادلة فوق التشخيص

ثانيًا: شرط الرتبـة

بالنسبة للمعادلة الأولى: $\begin{bmatrix} -1 & \beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

المصفوفة أعلاه غير مربعة، لذا يستوجب تجزئتها إلى مصفوفات مربعة ذات رتبة $(G-1)$ كالآتي:

وهكذا لكافة المصفوفات الممكنة .... $\begin{bmatrix} -1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & -1 & \gamma_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ثم إيجاد قيم محدّداتها، فإن وجد على الأقل واحدٌ من قيم محدّداتها الجزئية لا يساوي صفر، كانت المعادلة مشخصة وبعكسه تكون غير مشخصة.

بالنسبة للمعادلة الثانية: $\begin{bmatrix} -1 & A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

وبنفس الأسلوب السابق، يجب تجزئة المصفوفة أعلاه، ثم إيجاد قيمة محدداتها الجزئية.

وبالنسبة للمعادلة الثالثة، نجد المصفوفة التالية: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

وكذلك الحال هنا، بما أن المصـــفوفة غير مربعة، عليه يجب تجزئتها إلى كافة المصـــفوفات ذات الرتبة $(G-1)$ثم إيجاد قيمة محدّداتها الجزئية.

5-الصيـغة العامـة للتشخيص والاختـزال:

حالة التشـخيص والاختزال أعلاه، كانت على مسـتوى منظومة متضـمنة عددًا قليلًا من المعادلات، بشكلٍ عام في حالة وجود (k) من المتغيرات الخارجية، و(G) من المعادلات، عندها يســتوجب اســتخدام المصــفوفات والموجهات، لتوضـــيح ذلك دعنا نرجع إلى منظمة المعادلات المرقمة (3)، وبحلها للمتغيرات الداخلية يمكن الحصــول على الصــيغة المختزلة، بعبارة أخرى لغرض الوصــول إلى الصــيغة المختزلة لكل متغير داخلي في المنظومة لابد من وضـع (y^5) بدلالة الـــ(X^5) والمتغيرات المرتدة زمنيًا إن وجدت، وكذلك الأخطاء العشوائية المصاحبة لعملية الاختزال، كما يلي:

$$y_{1t} = \Pi_{11}x_{1t} + \Pi_{21}x_{21} + \cdots + \Pi_{1k}x_{kt} + V_{1t}$$
$$y_{2t} = \Pi_{21}x_{1t} + \Pi_{22}x_{21} + \cdots + \Pi_{2k}x_{kt} + V_{2t}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{Gt} = \Pi_{G1}x_{1t} + \Pi_{2G}x_{21} + \cdots + \Pi_{Gk}x_{kt} + V_{Gt}$$

حيث أن:

Π^5: تمثل معالم الصيغ المختزلة.

V^5 : تمثل الحدود المختلفة للأخطاء العشوائية في الصيغ المختزلة.

مرةً أخرى وباستخدام المصفوفات، يمكن أن نضع الشكل المختزل لمجموعة المعادلات أعلاه كالآتي:

$$y_t = \Pi x_t + V_t \dots\dots\dots\dots\dots (12)$$

حيث أن:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \cdots & \Pi_{1k} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \cdots & \Pi_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Pi_{G1} & \Pi_{G2} & \cdots & \Pi_{Gk} \end{bmatrix} \quad , \quad V_t = \begin{bmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \\ \vdots \\ V_{Gt} \end{bmatrix}$$

بضرب النموذج الهيكلي رقم (4) ضربًا مقدمًا بمعكوس مصفوفة معالم المتغيرات الداخلية نحصل على الصيغة المختزلة كالآتي:

$$Y_t + \beta^{-1}\Gamma X_t = \beta^{-1}U_t$$

$$\therefore Y_t = -\beta^{-1}\Gamma X_t + \beta^{-1}U_t \dots\dots\dots\dots (13)$$

بمقارنة صيغة الاختزال رقم (13) مع الصيغة رقم (12)، نلاحظ أن:

$$\Pi = -\beta^{-1}\Gamma \ , \ V_t = \beta^{-1}U_t$$

حيث أن $V_t = \beta^{-1}U_t$ يمثل متجه أخطاء الشكل المختزل.

وأن: $\Pi = -\beta^{-1}\Gamma$ يمثل مصفوفة معالم الشكل المختزل، حيث يمكن الحصول عليها بعد تقدير معالم الشكل الهيكلي بالطريقة التي تتناسب مع حالة التشخيص، وعليه فإن استخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) في تقدير معالم المنظومة يؤدي بشكل عام إلى الحصول على تقديرات غير متسقة، لذا استوجب التعبير عن المتغيرات التوضيحية في الشكل المختزل بدلالة المتغيرات المحددة مسبقًا، وهذا بدوره يؤدي إلى الحصول على تقديرات متسقة. علمًا بأن عملية الحصول على معالم الشكل النهائي بدلالة الشكل المختزل تتوقف على نوعية اختبار التشخيص، ولتوضيح مراحل إجراء هذا الاختبار دعنا أن نرجع إلى الشكل الهيكلي المرقم (4) والمعاد كتابته أدناه:

$$\beta Y_t + \Gamma X_t = U_t$$

وبأخذ المعادلة "g" من بين معادلات هذه المصفوفة فإن:

$$Y_{\mathrm{gt}} = \beta_{\mathrm{g}} Y_t + \gamma_{\mathrm{g}} X_t + U_{\mathrm{gt}} \dots\dots\dots\dots (14)$$

حيث إن: $\beta_{\mathrm{g}}, \gamma_{\mathrm{g}}$ تمثلان موجهي معالم المتغيرات الداخلية والخارجية الموجودة في المعادلة (g) وأن Y_t تمثل المتغيرات الداخلية التوضيحية.

ولو فرضنا أن:

G: تمثل عدد المتغيرات الداخلية الموجودة في المنظومة ككل

G^{Δ}: تمثل عدد المتغيرات الداخلية الموجودة في المعادلة "g".

$G^{\Delta\Delta} = G - G^{\Delta}$: تمثل المتغيرات الداخلية التي لم ترد في المعادلة ولكنها موجودة في المنظومة.

K^{**}: تمثل عدد المتغيرات المحدَّدة مسبقًا، والتي تظهر في المعادلة "g"

K: تمثل عدد المتغيرات المحدَّدة مسبقًا والموجودة في المنظومة ككل.

$K^{**} = K - K^{*}$: تمثل المتغيرات المحدَّدة مسبقًا والتي لم ترد في المعادلة، ولكنها موجودة في المنظومة.

كما يمكن تجزئة مصفوفة معادلات المتغيرات الداخلية للشكل الهيكلي كما يأتي:

$$\beta_k = [\beta_\Delta \quad O_{\Delta\Delta}]$$
$$\gamma_{\mathrm{g}} = [\gamma_\star \quad O_{\star\star}]$$

حيث أن:

$$\beta_\Delta = \left[\beta_{\mathrm{g}1} \quad \beta_{\mathrm{g}2} \quad \cdots \quad \beta_{\mathrm{g}G}{}^{\Delta}\right] \rightarrow 1 \times G^{\Delta}$$
$$O_{\Delta\Delta} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \rightarrow 1 \times G^{\Delta\Delta}$$
$$\gamma_\star = \left[\gamma_{\mathrm{g}1} \quad \gamma_{\mathrm{g}2} \quad \cdots \quad \gamma_{\mathrm{g}K}{}^{\star}\right] \rightarrow 1 \times K^{\star}$$
$$O_{*\Delta} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \rightarrow 1 \times K^{\star\star}$$

وبنفس الوقت يمكن تجزئة مصفوفة معاملات الشكل المختزل (Π) بالشكل الآتي:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{\Delta^\star} & \Pi_{\Delta^{\star\star}} \\ \Pi_{\Delta\Delta^\star} & \Pi_{\Delta\Delta^{\star\star}} \end{bmatrix}$$

حيث أن:

$\Pi_{\Delta^\star}$: مصفوفة ذات $G^{\Delta} \times K^{\star}$

$\Pi_{\Delta^{\star\star}}$: مصفوفة ذات $G^{\Delta} \times K^{\star\star}$

$\Pi_{\Delta\Delta^\star}$: مصفوفة ذات $G^{\Delta\Delta} \times K^{\star}$

$\Pi_{\Delta\Delta^{\star\star}}$: مصفوفة ذات $G^{\Delta\Delta} \times K^{\star\star}$

وبما أن: $\Pi = -\beta^{-1}\Gamma$ فإن: $\beta\Pi = -\Gamma$

ولتوضيح ذلك دعنا نعود إلى المعادلة "g"، حيث نأخذ صفًا واحدًا من مصفوفة (β) وبضربه في مصفوفة (Π) فإن الناتج يمثل صفًا واحدًا من مصفوفة (Γ) وكما يأتي: $\beta_{\mathrm{g}}\Pi = -\gamma_{\mathrm{g}}$

وبالتعويض عن (β_{g}) و (γ_{g}) بما يساويهما ينتج: $[\beta_\Delta \quad O_{\Delta\Delta}]\begin{bmatrix} \Pi_{\Delta^\star} & \Pi_{\Delta^{\star\star}} \\ \Pi_{\Delta\Delta^\star} & \Pi_{\Delta\Delta^{\star\star}} \end{bmatrix} = -[\gamma_\star \quad O_{\star\star}]$

وبالتعديل يمكن الصول على:

$$\beta_\Delta \Pi_{\Delta^\star} = -\gamma_\star \dots\dots\dots\dots\dots (15)$$
$$\beta_\Delta \Pi_{\Delta^{\star\star}} = O_{\star\star} \dots\dots\dots\dots\dots (16)$$

بما أن عدد كل المعادلات في العلاقة (16) هو (K^{**})، حيث أن كل معادلة تعود لعنصر واحد من الموجه ($1 \times K^{**}$) . فإذا أردنا الحصـــول على قيم β_{Δ} فإننا نحتاج على الأقل إلى ($G^{\Delta} - 1$) من المعادلات وهذا يتطلب أن يكون $K^{**} \geq G^{\Delta} - 1$ وهذا ما يطلق عليه بشرط الترتيب لاختبار التشخيص إن توفر هذا الشرط يعد ضـروريًا لاختبار التشـخيص ولكنه ليس كافيًا. إذ يجب أن يكون عدد المعادلات في العلاقة (16) مسـاويًا إلى ($G^{\Delta} - 1$)، عندها يمكن الحصـول على قيم (β_g) وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت رتبة أكبر مصـفوفة جزئية ناتجا عن ($\Pi_{\Delta}{}^{**}$) تساوي ($G^{\Delta} - 1$) أي أن : $\text{rank}\,(\Pi_{\Delta}{}^{**}) = G^{\Delta} - 1$ وهذا ما يطلق عليه بشرط الرتبة لاختبار التشخيص (كاظم الحسناوي، 2002 صفحة 312)، حيث أن:

$$\text{rank}\,(\Pi_{\Delta}{}^{**}) = \text{rank}\,[\beta_{\Delta\Delta} \quad \Gamma_{**}] = G^{\Delta} - 1 \dots\dots\dots\dots (17)$$

حيث أن ($\beta_{\Delta\Delta}$) تمثل مصـــفوفة المعاملات الهيكلية للمتغيرات الداخلية والتي لا تتضـــمنها العلاقة "g " ولكنها موجودة في المنظومة.

(Γ_{**}) تمثل مصـــفوفة المعاملات الهيكلية للمتغيرات المحدّدة مســبقا والتي لا تتضـــمنها العلاقة "g " ولكنها موجودة في المنظومة. وبتوفر هذين الشـــرطين يمكننا تحديد إمكانية الحصـــول على الشـــكل المختزل بدلالة معاملات الشكل الهيكلي أو النموذج الهيكلي.

بعد إجراء اختباري الترتيب والرتبة يمكن معرفة حالة التشخيص وفقًا للحالات الآتية:

1- إذا كان $\text{rank}\,(\Pi_{\Delta}{}^{**}) = G^{\Delta} - 1$ و $K^{**} > G^{\Delta} - 1$ فإن المعادلة في حالة (over ident) أو ما يعرف بـ(فوق التشخيص)

2- إذا كان $\text{rank}\,(\Pi_{\Delta}{}^{**}) = G^{\Delta} - 1$ و $K^{**} = G^{\Delta} - 1$ فإن المعادلة في حالة (Just or exact ident) أي مشخصة تمامًا.

3- إذا كان $\text{rank}\,(\Pi_{\Delta}{}^{**}) < G^{\Delta} - 1$ و $K^{**} \geq\geq G^{\Delta} - 1$ فإن المعادلة في حالة (Under ident) أي أن المعادلة تحت التشخيص (غير مشخصة).

4- إذا كان $K^{**} < G^{\Delta} - 1$ فإن المعادلة في حالة (Under ident) (غير مشخصة)، ففي حالة كون المعادلة غير مشـــخصـــة، عندها لا يمكن تقدير معالمها، ويجب إعادة النظر في المنظومة من حيث صـحة وصـف المتغيرات المكونة لها وعدد تلك المتغيرات وأهميتها بالنسـبة للعلاقة المدروسـة، أما إذا كانت المعادلة من نوع exact ident فبالإمكان الحصول على تقدير وحيد لمعالم المعادلة في المنظومة وإن أنســب طريقة لتقدير هذه المعالم هي طريقة المربعات الصـــغرى غير المباشـــرة (ILS) أو طريقة المربعات الصـــغرى ذات المرحلتين (SLS2)، أما إذا كانت العلاقة من نوع (over ident) فإن هذا يعني وجود أكثر من تقدير وحيد لمعالم العلاقة، حيث يمكن اســتخدام طريقة المربعات الصـــغرى ذات المراحل الثلاث (3SLS) أو طريقة الإمكان الأعظم ذات المعلومات التامة (FIML)، علمًا بأن المتطابقات والمعادلات التعريفية والتوازنية لا يجري لها اختبار التشخيص وذلك لعدم وجود معالم فيها.

مثال تطبيقي (3):

لمنظومة المعادلات التالية:

الكمية المطلوبة: $$Q_t^D = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 Y_t + U_1 t$$

الكمية المعروضة $$Q_t^S = \beta_1 + \beta_2 P_t + U_2 t$$

$$Q_t^D = Q_t^S = Q_t$$

جد الصيغة المختزلة لكل من المتغيرات الداخلية Q_t و P_t، علمًا بأن المتغير (Y_t) هو المتغير الخارجي الوحيد في المنظومة، ثم شخص كل معادلة من معادلات المنظومة.

الحل:

الخطوة الأولى في عملية التشـخيص، هي دمج المتغيرات الداخلية مع المتغيرات الخارجية فضـلًا عن المتغيرات المرتدة زمنيًا إن وجدت.

$$Q_t - \alpha_1 - \alpha_2 P_t - \alpha_3 Y_t = U_1 t$$
$$Q_t - \beta_1 - \beta_2 P_t = U_2 t$$

باستخدام الموجهات والمصفوفات:

$$\begin{matrix} \beta & & Y_t & + & \Gamma & & X_t & = & U_t \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_t \\ P_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_3 \\ -\beta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \end{bmatrix}$$

حيث أن:

β : تمثل مصفوفة لمعالم المتغيرات الداخلية.

Γ: تمثل مصـفوفة لمعالم المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيًا إن وجدت، فضـلاً عن معالم الحدود الثابتة لمختلف معادلات المنظومة.

Y_t : موجه يمثل عناصر المتغيرات الداخلية.

X_t: موجه يمثل عناصر المتغيرات الخارجية والمرتدة زمنيًا، علمًا بأن العنصر الأول منه يمثل الحد الثابت.

وكما بينا سابقا، يمكن الحصول على الصيغة المختزلة لكل متغير داخلي في المنظومة من خلال ضرب الشكل الهيكلي ضربًا مقدمًا بمعكوس مصفوفة معالم المتغيرات الداخلية (β) كالآتي:

$$Y_t = -\beta^{-1}\Gamma X_t + \beta^{-1} U_t$$

أي أن: $$Y_t = \Pi X_t + V_t$$

بشكل أكثر تفصيلاً: $$\begin{bmatrix} Q_t \\ P_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \end{bmatrix}$$

حيث أن:

$$\Pi = -\beta^{-1}\Gamma = -\begin{bmatrix}1 & -\alpha_2\\ 1 & -\beta_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_3\\ -\beta_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{\alpha_2-\beta_2}\begin{bmatrix}-\beta_2 & \alpha_2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_3\\ -\beta_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore \Pi = \frac{1}{\alpha_2-\beta_2}\begin{bmatrix}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1) & -\alpha_3\beta_2\\ \alpha_1-\beta_1 & -\alpha_3\end{bmatrix}$$

وأن:

$$V_t = \begin{bmatrix}V_{1t}\\ V_{2t}\end{bmatrix} = \beta^{-1}U_t = \frac{1}{\alpha_2-\beta_2}\begin{bmatrix}-\beta_2 & \alpha_2\\ -1 & -\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{1t}\\ U_{2t}\end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha_2-\beta_2}\right)\begin{bmatrix}-\beta_2U_{1t}+\alpha_2U_{2t}\\ -U_{1t}+U_{2t}\end{bmatrix}$$

عليه فإن الصيغة المختزلة للمتغيرات الداخلية:

$$\begin{bmatrix}Q_t\\ P_t\end{bmatrix} = \frac{-1}{\alpha_2-\beta_2}\begin{bmatrix}(\alpha_2\beta_2-\alpha_2\beta_1) & -\alpha_3\beta_2\\ (\alpha_1-\beta_1) & -\alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ Y_t\end{bmatrix} + \frac{1}{\alpha_2-\beta_2}\begin{bmatrix}-\beta_2U_{1t}+\alpha_2U_{2t}\\ -U_{1t}+U_{2t}\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الصيغة المختزلة لدالة العرض والطلب (Q_t) تعطى كالآتي:

$$Q_t = \frac{-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}{\alpha_2-\beta_2} + \frac{\alpha_3\beta_2}{\alpha_2-\beta_2}Y_t - \frac{\beta_2U_{1t}+\alpha_2U_{2t}}{\alpha_2-\beta_2}$$

في حين الصيغة المختزلة لمتغير السعر (P_t):

$$P_t = \frac{-\alpha_1+\beta_1}{\alpha_2-\beta_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2-\beta_2}Y_t - \frac{U_{1t}+U_{2t}}{\alpha_2-\beta_2}$$

أما حالة تشخيص كل معادلة من معادلات المنظومة، يتطلب تحقيق شرطي الترتيب والرتبة كالآتي:

صبغة شرط الترتيب (Order condition) العامة $K^{**} \geq G^{\Delta}-1$ بالنسبة للمعادلة الأولى (دالة الطلب):

$G^{\Delta}=2$ تمثل عدد المتغيرات الداخلية في المعادلة المطلوب تشخيصها.

$K^{**}=0$ تمثل عدد المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيًا غير الموجودة في المعادلة المطلوب تشخيصها ولكنها موجودة ضمن المنظومة.

$$\therefore K^{**} < G^{\Delta}-1$$

أي أن: $0 < 1$

وهذا يعني أن المعادلة الأولى غير مشخصة وبالتالي لا توجد ضرورة لإجراء اختبار الرتبة لهذه المعادلة.

أما بالنسبة للمعادلة الثانية (دالة العرض):

$$K^{**}=1 \ , \ \ G^{\Delta}=2$$

$$\therefore K^{**} = G^{\Delta}-1$$

أي أن $1=1$

أي أن دالة العرض مشـخّصــة تمامًا، عليه يسـتوجب الانتقال إلى اختبار الرتبة والذي بدوره يتطلب وضــع كافة معالم المنظومة بدلالة كافة المتغيرات سواءٌ كانت داخلية أو خارجية أو مرتدة زمنيًا وكالآتي:

المعادلــة	1	Q_t	P_t	Y_t
1	$-\alpha_1$	1	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$
2	$-\beta_1$	1	$-\beta_2$	0

بالرجوع إلى صيغة اختبار الرتبة المرقمة (17) والمعاد كتابتها أدناه:

$$Rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = Rank\ [\beta_{\Delta\Delta}\Gamma_{**}] - G^{\Delta\Delta}$$

حيث أن:

$$Rank\ [\beta_{\Delta\Delta}\Gamma_{**}] = Rank \begin{bmatrix} \text{مصفوفة تمثل} \\ \text{عناصرها المعالم} \\ \text{المقابلة للمعلمة} \\ \text{المفقودة في المعادلة} \\ \text{المطلوب تشخيصها} \end{bmatrix} = Rank\ (-\alpha_3) = 1$$

$G^{\Delta\Delta} = 0$ تمثل عدد المتغيرات الداخلية المستبعدة من المعادلة المطلوب تشخيصها.

$$\therefore\ Rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = 1 - 0 = 1$$

أو بصيغة أخرى: $Rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = G^{\Delta} - 1$

ربما أن $G^{\Delta} = 2$ ، $Rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = 1$

وبالتالي فإن حالة التشخيص لدالة العرض تأخذ الوضع التالي:

$$Rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = G^{\Delta} - 1\ ,\ \ k^{**} = G^{\Delta} - 1$$

أي أن: $Rank\ (\Pi_{\Delta^{**}}) = 1\ ,\ \ 1 = 1$

النتيجة أعلاه تعني بأن دالة العرض قد اجتازت شـرطي الترتيب والرتبة وهي بالتالي مشـخّصــة تمامًا، أي أن هناك تقدير وحيد لمعالم معادلة العرض (كاظم الحسناوي، 2002 صفحة 320).

<u>مثال تطبيقي (4):</u>

اختزل ثم شخّص كل معادلة من معادلات المنظومة التالية:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 C_{t-1} + U_{1t}$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_2 I_{t-1} + U_{21}$$

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 M_t + U_{3t}$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

حيث أن: C_t، I_t، Y_t، R_t تمثل الاســـتهلاك، الاســـتثمار، الدخل وســـعر الفائدة على التوالي وهي متغيرات داخلية.

M_t و G_t تمثل السيولة النقدية والنفقات الحكومية وهي متغيرات خارجية.

C_{t-1}، I_{t-1} تمثل متغيرات داخلية مرتدة زمنيًا.

الحل:

إيجاد الصــيغة المختزلة لكل متغير داخلي من متغيرات المنظومة، يتطلب إعادة كتابة هيكل المنظومة بالشــكل التالي:

$$C_t - \alpha_0 - \alpha_1 Y_t - \alpha_2 C_{t-1} = U_{1t}$$
$$I_t - \beta_0 - \beta_1 R_t - \beta_2 I_{t-1} = U_{21}$$
$$R_t - \gamma_0 - \gamma_1 Y_t - \gamma_2 M_t = U_{3t}$$
$$Y_t - C_t - I_t - G_t = 0$$

وباستخدام الموجهات والمصفوفات، يمكن إعادة ترتيب كل من المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيًا كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 0 & -\gamma_1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \\ R_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ -\gamma_0 & 0 & 0 & -\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ C_{t-1} \\ I_{t-1} \\ M_t \\ G_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \\ U_{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\beta \qquad\qquad Y_t \quad + \qquad\qquad \Gamma \qquad\qquad X_t \quad = \quad U_t$$

وعليه فإن الصيغة المختزلة تكون كالآتي:

$$Y_t = -\beta^{-1}\Gamma X_t + \beta^{-1} U_t$$

$$\therefore \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \\ R_t \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta} \begin{bmatrix} \alpha_0(1-\beta_1\gamma_1) + \alpha_1(\beta_0 + \beta_1\gamma_0) & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\beta_2 & \alpha_1\beta_1\gamma_2 & \alpha_1 \\ \alpha_0\beta_1\gamma_1 + (1-\alpha_1)(\beta_0 + \beta_1\gamma_0) & \alpha_2\beta_1\gamma_1 & (1-\alpha_1)\beta_2 & (1-\alpha_1)\beta_1\gamma_1 & \beta_1\gamma_1 \\ \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1\gamma_0 & \alpha_2 & \beta_2 & \beta_1\gamma_2 & 1 \\ (\alpha_0 + \beta_0)\gamma_1 + (1-\alpha_1)\gamma_0 & \alpha_2\gamma_1 & \beta_2\gamma_1 & (1-\alpha_1)\gamma_2 & \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ C_{t-1} \\ I_{t-1} \\ M_t \\ G_t \end{bmatrix} + \frac{1}{\theta} \begin{bmatrix} 1-\beta_1\gamma_1 & \alpha_1 & \alpha_1\beta_1 \\ \beta_1\gamma_1 & (1-\alpha_1) & (1-\alpha_1)\beta_1 \\ 1 & 1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & (1-\alpha_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \\ U_{3t} \end{bmatrix}$$

حيث أن: $\theta = 1 - \alpha_1 - \beta_1\gamma_1$ يمثل محدد مصـفوفة (β)، علمًا بأن الحد الثاني من الصـيغة أعلاه، قد تغيرت قيمة رتبة المصـفوفة حيث أصـبحت(3×4) وذلك لأن العنصـر الأخير من موجه الأخطاء (U_t) يساوي صفر.

من الشـكل المختزل أعلاه، يمكن تحديد كافة الصـيغ المختزلة، فعلى سـبيل المثال للصـيغة المختزلة لمعادلة الاستهلاك (C_t) تكتب كالآتي:

$$C_t = \frac{\alpha_0(1-\beta_1\gamma_1) + \alpha_1(\beta_0 + \beta_1\gamma_0)}{\theta} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\theta} C_{t-1} + \frac{\alpha_1\beta_2}{\theta} I_{t-1} + \frac{\alpha_1\beta_1\gamma_2}{\theta} M_t + \frac{\alpha_1}{\theta} G_t + \frac{(1-\beta_1\gamma_1)U_{1t} + \alpha_1 U_{2t} + \alpha_1\beta_1}{\theta} U_{3t}$$

وهكذا لكافة متغيرات المنظومة الداخلية...

اما حالة تشـخيص معادلات المنظومة، فيسـتوجب وضـع كافة معالم الشـكل الهيكلي بدلالة متغيرات المنظومة الداخلية والخارجية والمرتدة زمنيًا وكما في الجدول التالي:

المعادلة	1	C_t	I_t	R_t	Y_t	C_{t-1}	L_{t-1}	M_t	G_t
1	$-\alpha_0$	1	0	0	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	0	0	0
2	$-\beta_0$	0	1	$-\beta_1$	0	0	$-\beta_2$	0	0
3	$-\gamma_0$	0	0	1	$-\gamma_1$	0	0	$-\gamma_2$	0
4	0	-1	-1	0	1	0	0	0	-1

بالنسبة للمعادلة الأولى: دالة الاستهلاك:

1 شرط الترتيب:

$$k^{**} \geq G^{\Delta} - 1 \quad , \qquad G^{\Delta} = 2 \ , \quad k^{**} = 3$$
$$\therefore k^{**} > G^{\Delta} - 1 \quad , \qquad 3 > 1$$

2- شرط الرتبة:

$$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = rank[\beta_{\Delta\Delta} \quad \Gamma_{**}] - G^{\Delta\Delta}$$

علمًا بأن:

$$rank[\beta_{\Delta\Delta} \quad \Gamma_{**}] = rank\begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\gamma_2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3 \ , \qquad G^{\Delta\Delta} = 2$$

$$\therefore rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = 3 - 2 = 1$$

أو: $$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = G^{\Delta} - 1 = 2 - 1 = 1$$

وبما أن حالة التشخيص لدالة الاستهلاك، أخذ الوضع التالي:

$$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = G^{\Delta} - 1 \ , \quad k^{**} > G^{\Delta} - 1$$

أي أن: $$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = 1 \quad , \quad 3 > 1$$

يتضـــح من النتيجة أعلاه، أن معادلة الاســـتهلاك فوق التشـــخيص، أي أن هناك أكثر من تقدير لمعالم دالة الاستهلاك.

بالنسبة للمعادلة الثانية – دالة الاستثمار.

1- شرط الترتيب:

$$k^{**} = 3 \ , \qquad G^{\Delta} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$k^{**} > G^{\Delta} - 1 \quad , \ 3 > 1$$

2- شرط الرتبة:-

$$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = rank\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & -\gamma_2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3 \ ,$$

في حين: $G^{\Delta\Delta} = 2$

وبما أن: $$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = 3 - 2 = 1$$

أي أن: $$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = G^{\Delta} - 1 \quad , \ k^{**} > G^{\Delta} - 1$$

$$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = 1 \ , \qquad 3 > 1$$

نتيجة الاختبار أعلاه لشرطي الترتيب والرتبة، تعني بأن معادلة الاستثمار فوق التشخيص.

بالنسبة للمعادلة الثالثة :- دالة سعر الفائدة

1- شرط الترتيب:-

$$k^{**} = 3 \ , \qquad G^{\Delta} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore \ k^{**} > G^{\Delta} - 1 \quad , \ 3 > 1$$

2- شرط الرتبة:-

$$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta_2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

في حين $G^{\Delta\Delta} = 2$

وبما أن: $\therefore rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = 3 - 2 = 1$

$$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = G^{\Delta} - 1 \ , \ k^{**} > G^{\Delta} - 1$$

أي أن: $$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = 1 \quad , \ 3 > 1$$

ومنه يتضـــح بأن معادلة ســـعر الفائدة قد اجتازت اختبار شـــرط الترتيب والرتبة وبالتالي فهي معادلة فوق التشخيص، والمنظومة ككل مشخصة بشكل نهائي.

6- طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS):

تستخدم هذه الطريقة لتقدير معالم كل معادلة من معادلات المنظومة والتي تكون نتيجة اختبار التشـخيص فيها مشـخصـــة تمامًا، والخطوة الأولى لتطبيق هذه الطريقة تتمثل بإيجاد الصـــيغة المختزلة لكل متغير داخلي في المنظومة، أي التعبير عن المتغيرات الداخلية للمنظومة بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيًا وبالتالي معرفة إمكانية التقدير لمعالم المنظومة من خلال معالم الصـــيغ المختزلة وبالذات معالم المعادلة المشـخّصـــة تمامًا في منظومة المعادلات، أما الخطوة الثانية فتتمثل بتقدير معالم الصـيغ المختزلة بالأسـلوب الملائم كأن يكون تطبيق طريقة (OLS) وهذا يعني أن طريقة المربعات الصـغرى غير المباشـرة (ILS) تسـتند على نفس افتراضات طريقة (OLS) فضلاً عن أن تكون المعادلة في المنظومة مشخصة تمامًا

يتضح من أعلاه، أن تقدير معالم الصيغة المختزلة (Π_j) سوف تتصف بخاصية أفضل تقدير خطي غير متحيز (BLUE)، ومنه ســوف تكون تقديرات معالم المنظومة (المعالم الهيكلية) المحســوبة من قيم (Π_j) متحيزة في العينات الصـــغيرة ولكنها متســـقة عندما يؤول حجم العينة إلى ما لا نهاية، أي عندما $(n \to \infty)$ ولإثبات ذلك دعنا ندرس منظومة المعادلات البسيطة التالية:

$$\left.\begin{matrix} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + U_t \\ Y_t = C_t + Z_t \end{matrix}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (18)$$

حيث أن: $t = 1,2, \dots, n$

Y_t و C_t تمثلان الاستهلاك والدخل على التوالي، وهما متغيرات داخلية.

Z_t يمثل الاستثمار وهو متغير خارجي.

المنظومة أعلاه متكونة من علاقتين، الأولى تمثل معادلة الاســـتهلاك والثانية متطابقة الدخل، ولغرض معرفة الطريقة الملائمة لتقدير معالم دالة الاســـتهلاك، لا بد من إجراء اختبار التشـــخيص لكل معادلة من معادلات المنظومة وكالآتي:

$$C_t - \beta_0 - \beta_1 Y_t = U_t$$
$$Y_t - C_t - Z_t = 0$$

والجدول التالي يبين معالم المنظومة (المعالم الهيكلية) بدلالة كافة متغيرات المنظومة.

المعادلة	1	C_t	Y_t	Z_t
1	$-\beta_0$	1	$-\beta_1$	0
2	0	-1	1	-1

بالنسبة لمعادلة الاستهلاك:

اختبار الترتيب:

صيغة الاختبار: $k^{**} > G^{\Delta} - 1$

$$k^{**} = 1 \ , \qquad G^{\Delta} = 2$$

وبما أن $k^{**} > G^{\Delta} - 1$، أي أن $1 = 1$، إذًا معادلة الاستهلاك مشخصة تمامًا.

اختبار الرتبة:

صيغة الاختبار: $$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = rank[\beta_{\Delta\Delta} \quad \Gamma_{**}] - G^{\Delta\Delta}$$

حيث أن: $$rank[\beta_{\Delta\Delta} \quad \Gamma_{**}] = rank\ (-1) = 1$$

$$G^{\Delta\Delta} = 0$$

وبما أن $rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = G^{\Delta} - 1$، أي أن $1 = 1$، وهذا بدوره يؤكد تشخيص دالة الاستهلاك بشكل نهائي، عليه فإن الأسلوب الملائم لتقدير معالم هذه الدالة هو طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، لذا فإن الخطوة التالية بعد التشخيص هي إيجاد الصيغة المختزلة (كاظم الحسناوي، 2002 صفحة 330)، أي أن:

$$Y_t = -\beta^{-1}\Gamma X_t + \beta^{-1}U_t$$

أو: $$Y_t = \Pi X_t + V_t$$

حيث أن: $$V_t = \beta^{-1}U \ , \ \Pi = -\beta^{-1}\Gamma$$

بالتطبيق على المنظومة المدروسة نحصل على:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Z_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \end{bmatrix}$$

حيث أن:

$$\Pi = -\beta^{-1}\Gamma = -\begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\beta_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\beta_1} \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_t = \beta^{-1}U_t = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{U_t}{1-\beta_1} \\ \dfrac{U_t}{1-\beta_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\beta_1}\begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ Z_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{U_t}{1-\beta_1} \\ \frac{U_t}{1-\beta_1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore C_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{\beta_1}{1-\beta_1}Z_t + \frac{U_t}{1-\beta_1}$$

$$Y_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1}Z_t + \frac{U_t}{1-\beta_1}$$

وبشكل أكثر اختصارًا، يمكن إعادة كتابة الصيغتين المختزلتين أعلاه كالآتي:

$$\left.\begin{aligned} C_t &= \Pi_{11} + \Pi_{12}Z_t + V_{1t} \\ Y_t &= \Pi_{21} + \Pi_{22}Z_t + V_{2t} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (19)$$

حيث أن: $\Pi_{11} = \Pi_{21} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}\ , \Pi_{12} = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}\ ,\ \Pi_{22} = \frac{1}{1-\beta_1}$

ومنه يتبين بأن هناك إمكانية لتقدير معالم معادلات المنظومة، وبالذات معالم دالة الاســـتهلاك وذلك على وفق العلاقات التالية:

1- الحد الثابت لدالة الاستهلاك: $\beta_0 = \frac{\Pi_{11}}{\Pi_{22}} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}\Big/\frac{1}{1-\beta_1} = \beta_0$

2-الميل الحدي لدالة الاستهلاك: $\beta_1 = \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}} = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}\Big/\frac{1}{1-\beta_1} = \beta_1$

الاسـتنتاج أعلاه، يؤكد بأن دالة الاسـتهلاك فعلاً مشـخصـة تمامًا وذلك لأن معالمها تتصـف بصـفة التقديرات الوحيدة.

بما أن الأخطاء العشـــوائية للصـــيغ المختزلة رقم (19) تخضـــع للفرضـــية التالية $V_{1t} \sim N(0, \sigma_{1v}^2)$ و $V_{2t} \sim N(0, \sigma_{2v}^2)$ وأن V_{1t} مستقلة عن V_{2t}، إذًا يمكن تقدير معالمها بطريقة (OLS)

بطرح الصيغ المختزلة من أوساطها الحسابية نحصل على نموذج مختزل مقاسًا بالانحرافات (التقدير حول نقطة المتوسط).

$$\left.\begin{aligned} (C_t - \bar{C}) &= \frac{\beta_1}{1-\beta_1}(Z_t - \bar{Z}) + \frac{1}{1-\beta_1}(U_t - \bar{U}) \\ (Y_t - \bar{Y}) &= \frac{1}{1-\beta_1}(Z_t - \bar{Z}) + \frac{1}{1-\beta_1}(U_t - \bar{U}) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (19)$$

بعبارة أخرى:

$$c_t = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}z_t + \frac{1}{1-\beta_1}(U_t - \bar{U})$$

$$y_t = \frac{1}{1-\beta_1}z_t + \frac{1}{1-\beta_1}(U_t - \bar{U})$$

حيث أن: $c_t = (C_t - \bar{C})\ ,\ y_t = (Y_t - \bar{Y})\ ,z_t = (Z_t - \bar{Z})$

وبذلك يمكن إعادة كتابة الشكل المختزل لدالة الاستهلاك كالآتي: $c_t = \Pi_{11} z_t + v_t$

حيث أن: $\Pi_{11} = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}\ , v_t = \frac{1}{1-\beta_1}(U_t - \bar{U})$

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معالم الشكل المختزل لدالة الاستهلاك أعلاه، نحصل على:

$$\widehat{\Pi}_{11} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2}$$

حيث أن $(\widehat{\Pi}_{11})$ تمثل القيمة التقديرية للمعلمة (Π_{11}).

وبما أن $\Pi_{11} = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}$ ، وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2} = \frac{b_1^\star}{1 - b_1^\star} \dots\dots\dots\dots\dots (21)$$

حيث أن $(b_1^\star)$ تمثل التقدير غير المباشر للمعلمة (β_1)، بتعديل العلاقة (21) نحصل على:

$$\therefore b_1^\star = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2 + \sum c_t z_t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (22)$$

ومن المعادلة التعريفية للدخل لدينا: $Y_t = C_t + Z_t$

أو بالانحرافات: $y_t = c_t + z_t$

وبالضرب في المتغير (z_t) والجمع نحصل على:

$$\sum y_t z_t = \sum c_t z_t + \sum z_t^2$$

وبالتعويض في الصيغة رقم (22) أعلاه نحصل على:

$$b_1^\star = \frac{\sum c_t z_t}{\sum y_t z_t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots . (23)$$

حيث أن $b_1^\star = b_{1ILS}$ تمثل تقديرات المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) بالرجوع إلى الصيغة المقاسة بالانحرافات المرقمة (20) والتعويض بالصيغة التقديرية المرقمة (23) نحصل على:

$$b_{1ILS} = \frac{\sum \lfloor \beta_1/(1-\beta_1).(Z_t - \bar{Z})^2 + 1/(1-\beta_1).(Z_t - \bar{Z})\,(U_t - \bar{U}) \rfloor}{\sum [1/(1-\beta_1).(Z_t - \bar{Z})^2 + 1/(1-\beta_1).(Z_t - \bar{Z})\,(U_t - \bar{U})]}$$

$$\therefore b_{1ILS} = \frac{1/(1-\beta_1)\ \lfloor \beta_1 \sum (Z_t - \bar{Z})^2 + \sum (Z_t - \bar{Z})\,(U_t - \bar{U}) \rfloor}{1/(1-\beta_1)\ [\sum (Z_t - \bar{Z})^2 + \sum (Z_t - \bar{Z})\,(U_t - \bar{U})]}$$

$$\therefore b_{1ILS} = \frac{\beta_1 \sum z_t^2 + \sum z_t u_z}{\sum z_t^2 + \sum z_t u_z}$$

بالتقسيم على حجم العينة (n):

$$b_{1ILS} = \frac{\beta_1 \sum \frac{z_t^2}{n} + \sum \frac{z_t u_z}{n}}{\frac{\sum z_t^2}{n} + \frac{\sum z_t u_z}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} E(b_{1ILS}) = \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{\beta_1(\sum z^2/n) + (\sum zu/n)}{(\sum z^2/n) + (\sum zu/n)}\right]$$

أي أن عندما ($n \to \infty$) فإن $\sum z_t u_t/n \to 0.0$ ومنه نحصل على:

$$\lim_{n\to\infty} E(b_{1ILS}) = \beta_1$$

وهذا يعني تقديرات المربعات الصـغرى غير المباشـرة (ILS) غير متحيزة عندما ($n \to \infty$)، أي عندما يكون حجم العينة كبيرًا.

أما تباين هذا المقدر فيمكن اشتقاقه كالآتي، من العلاقة رقم (23) لدينا: $b_{ILS} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t y_t}$

ولمنظومة المعادلات الآنية المرقمة (18) يمكن الحصـول على تباين الميل الحدي لمعادلة الاستهلاك على وفق الصيغة العامة للتباين التالية:

$$\mathrm{Var}(\mathrm{b}_{ILS}) = \mathrm{E}[\mathrm{b}_{1ILS} - \mathrm{E}(\mathrm{b}_{1ILS})]^2 = \mathrm{E}(\mathrm{b}_{1ILS} - \beta_1)^2$$

وبما أن دالة الاستهلاك المقاسة بالانحرافات، يمكن وضعها بالشكل التالي:

$$c_t = \beta_1 y_t + u_t$$

$$\therefore b_{1ILS} = \frac{\sum z\,(\beta_1 y_1 + u_t)}{\sum y_t z_t} = \frac{\beta_1 \sum z_t y_t + \sum z_t u_t}{\sum y_t z_t} = \beta_1 + \frac{\sum z_t u_t}{\sum y_t z_t}$$

بالتعويض نحصل على:

$$var(b_{1ILS}) = E\left(\beta_1 + \frac{\sum z_t u_t}{\sum y_t z_t} - \beta_1\right)^2 = E\left(\frac{\sum z_t u_t}{\sum y_t z_t}\right) = \frac{1}{(\sum y_t z_t)^2} E(z_t u_t)^2$$

$$= \frac{1}{(\sum y_t z_t)^2} E(z_t^2 u_t^2) + 2\sum z_t z_{t'} . u_t u_{t'}$$

$$= \frac{1}{(\sum y_t z_t)^2}\left[\sum z_t^2\, E(u_t^2) + 2\sum z_t . z_{t'} . E(u_t u_{t'})\right]$$

وبما أن: $E(u_t u_{t'}) = 0$

$$\therefore Var(b_{1ILS}) = \frac{\sigma_n^2}{(\sum y_t z_t)^2} . \sum z_t^2$$

1-بالضرب والقسمة في المقدار $\sum y_t^2$:

$$Var(b_{1ILS}) = \frac{\sigma_u^2 \sum z_t^2 \sum y_t^2}{(\sum y_t z_t)^2 \sum y_t^2} = \frac{\sigma_u^2}{r_{ry}^2 \sum y_t^2} \dots\dots\dots\dots\dots (24)$$

أو يمكن أن توضع بشكل آخر، بما أن:

$$r_{zy}^2 = \frac{(\sum y_t z_t)^2}{\sum z_t^2 \sum y_t^2} = \frac{[n\sum Z_t Y_t - (\sum Z_t)(\sum Y_t)]^2}{[n\sum Z_t^2 - (\sum Z_t)^2][n\sum Y_t^2 - (\sum Y)^2]}$$
$$= \frac{n^2\left[\sum Z_t Y_t - \frac{(\sum z_t)(\sum y_t)}{n}\right]^2}{n[n\sum Z_t^2 - (\sum Z_t)^2]\left[\sum Y_t^2 - \frac{(\sum Y_t)^2}{n}\right]}$$

بالتعويض في صيغة تباين الميل الحدي المرقمة (24)، نحصل على:

$$Var(b_{1ILS}) = \frac{\sigma_u^2}{\sum Y_t^2} \cdot \left(\frac{\left[\sum Y_t^2 - \frac{(\sum y_t)^2}{n}\right][n\sum z_t^2 - (\sum y_t)^2]}{n\left[\sum Z_t Y_t - \frac{(\sum z_t)(\sum y_t)}{n}\right]^2} \right)$$
$$= \frac{\sigma_u^2 \sum Y_t^2 [n\sum z_t^2 - (\sum y_t)^2]}{n\sum y_t^2 . (\sum z_t y_t)^2}$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} Var\,(b_{1ILS}) = \sigma_u^2 \lim_{n\to\infty} \left\{ \left[\frac{n\sum z_t^2 - (\sum y_t)^2}{(\sum z_t y_t)^2} \right] . \frac{1}{n} \right\}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} Var\,(b_{1ILS}) = \sigma_u^2 \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n\sum Z_t^2 - (\sum Z_t)^2}{(\sum z_t y_t)^2} \right] . \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

وبما أن الشرطين التاليين:

$$1- \lim_{n\to\infty} E(b_{1ILS}) = \beta \quad ،2- \lim_{n\to\infty} Var\,(b_{1ILS}) = 0$$

قد تحققا في مقدرات (*ILS*) عليه فإن المقدر (b_{1ILS}) متسق (*Consistent*)

تجدر الإشـــارة هنا إلى أن هناك طريقة أخرى لإيجاد مقدرات المربعات الصـــغرى غير المباشـــرة وتتلخص هذه الطريقة بتقدير معالم الصيغ المختزلة للمتغيرات الداخلية، أي أن:

$$\left.\begin{aligned} C_t &= \Pi_{11} + \Pi_{12} Z_t + V_{1t} \\ Y_t &= \Pi_{21} + \Pi_{22} Z_t + V_{2t} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (25)$$

وباستخدام الانحرافات:

$$\left.\begin{aligned} C_t &= \Pi_{12} z_t + v_{1t} \\ Y_t &= \Pi_{22} z_t + v_{2t} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (26)$$

وكما بينا سابقا: $\beta_0 = \frac{\Pi_{11}}{\Pi_{22}}$ ، $\beta_1 = \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}$

من مجموعة معادلات الشكل المختزل رقم (26) لدينا التقديرات باستخدام (*OLS*) التالية:

$$\hat{\Pi}_{12} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2} \quad , \quad \hat{\Pi}_{22} = \frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2}$$

وعلى وفق العلاقة غير المباشرة لتقدير الميل الحدي في دالة الاستهلاك نحصل على:

$$b_{1ILS} = \frac{\hat{\Pi}_{12}}{\hat{\Pi}_{22}} = \frac{\frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2}}{\frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2}} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t y_t}$$

وهو نفس التقدير السابق.

أما الحد الثابت لدالة الاستهلاك في المنظومة المرقمة (18)، يمكن تقديره بشكل غير مباشر، أي أن نبدأ من الصيغة المختزلة للاستهلاك والمرقمة (25)، حيث أن:

$$\hat{\Pi}_{11} = \bar{C} - \hat{\Pi}_{12}\,\bar{Z}$$

وعلى وفق العلاقة الحاصل عليها من الصيغة المختزلة، لدينا: $b_{0ILS} = \frac{\hat{\Pi}_{11}}{\hat{\Pi}_{22}}$

علمًا بأن تقديرات (*OLS*) لمعالم الصيغ المختزلة تعطى كالآتي:

$$\hat{\Pi}_{22} = \frac{\sum y_t z_t}{\sum z_t^2} \quad , \quad \hat{\Pi}_{12} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2}$$

بالتعويض وإعادة الترتيب نحصل على:

$$b_{0ILS} = \frac{\bar{C} - (\sum c_t z_t / \sum z_t^2)\bar{Z}}{\sum y_t z_t / \sum z_t^2}$$

$$\therefore b_{0ILS} = \left(\frac{\sum z_t^2}{\sum z_t y_t}\right)\bar{C} - \left(\frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t y_t}\right)\bar{Z} = \left(\frac{\sum z_t^2}{\sum z_t y_t}\right)\bar{C} - b_{1ILS}\bar{Z}$$

ويمكن البرهنة بأن تباين الحد الثابت أعلاه، يعطى على وفق الصيغة التالية:

$$Var(b_{0ILS}) = \frac{\sigma_n^2 \sum z_t^2 \sum z_t^2}{n(\sum z_t y_t)^2} = \frac{\sigma_n^2(\sum z_t^2 + n\bar{Z}^2)}{n r_{zy}^2 \sum y_t^2}$$

وبنفس الأسلوب السابق، يمكن الإثبات بأن الحد الثابت المقدر بطريقة (*ILS*) هو تقدير غير متحيز ومتسق بنفس الوقت.

7- طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (*2SLS*):

تستخدم هذه الطريقة لتقدير معالم المعادلات في المنظومة التي تكون في حالة التشخيص التام، حيث تشير تسمية هذه الطريقة إلى أن الأسلوب المستخدم فيها يكون على مرحلتين:

المرحلة الأولى: تحديد المتغير الداخلي في المعادلة المطلوب تقدير معالمها، ثم إيجاد الصـــيغة المختزلة لهذا المتغير، واسـتخدام طريقة (OLS) بعد توفر الشـروط اللازمة في عملية تقدير معالم الصـيغة المختزلة وبالتالي إيجاد القيم التقديرية لمتغيرات المنظومة الداخلية.

فعلى سبيل المثال، بإعادة كتابة الشكل الهيكلي المرقم (14) كالآتي:

$$Y = \beta Y + \Gamma X + U$$

حيث يتم ايجاد قيم مصـــفوفتي β و Γ باســـتخدام طريقة (OLS) وتســـتخرج قيم Y_t التقديرية عن طريق إيجاد الشكل المختزل ، أي أن:

$$\hat{Y}_t = (-\beta^{-1}\Gamma)X_t$$

المرحلة الثانية: أن تســـتخدم طريقة (OLS) مرة أخرى في تقدير معالم الشـــكل الهيكلي بعد إحلال قيم $(\hat{Y})$ المقدرة من المرحلة الأولى محل قيم Y . ولكي يتم التقدير باســتخدام طريقة $(2SLS)$ تقدر معالم كافة معادلات المنظومة باستخدام (OLS) بعبارة أخرى:

$$\begin{bmatrix}\hat{\beta}\\ \hat{Y}\end{bmatrix}_{OLS} = (Z'Z)^{-1}Z'Y = \begin{bmatrix}Y'Y & Y'X\\ X'Y & X'X\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}Y'\\ X'\end{bmatrix}Y$$

حيث أن $Z = [Y \quad X]$ وتســتخدم هذه المعالم المقدرة في إيجاد معالم الشــكل المختزل والتي بواســطتها يتم استخراج قيم $(\hat{Y})$ والتي تساوي:

$$\hat{Y} = X\hat{\Pi} = X(X'X)^{-1}X'Y$$

بعد ذلك يتم إحلال قيم $(\hat{Y})$ في كل معادلـة من معادلات المنظومـة بـدلاً من قيم Y وتكرر عمليـة التقدير باستخدام طريقة (OLS) لمعادلات الشكل الهيكلي وبالشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix}\hat{\beta}\\ \hat{Y}\end{bmatrix}_{2SLS} = \begin{bmatrix}\hat{Y}'\hat{Y} & \hat{Y}'X\\ X'\hat{Y} & X'X\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{Y}'\\ X'\end{bmatrix}Y$$

ولغرض توضـــيح هذه الطريقة، دعنا ندرس منظومة المعادلات الآنية المرقمة (18) والتي كانت فيها معادلة الاستهلاك ذات تشخيص تام، حيث تضمنت متغير داخلي متمثلا بـــ (Y_t) وكانت الصيغة المختزلة له مقاسة بالانحرافات كالآتي:

$$Y_t = \Pi_{22}Z_t + v_{2t}$$

وكمرحلة أولى تم استخدام طريقة (OLS) لتقدير معالم الصيغة المختزلة أعلاه، بعبارة أخرى:

$$\hat{\Pi}_{22} = \frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2}$$

حيث استخدمت التقديرات الأولية للمتغير الداخلي التالي:

$$\hat{y}_t = \hat{\Pi}_{22}z_t = \frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2}.z_t$$

في عملية تقدير معادلة الاستهلاك الواردة في منظومة المعادلات، أي أن:

$$c_t = \beta_1 \hat{y}_t + u_t$$

بعبارة أخرى: $$c_t = \beta_1 \left(\frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2} \right) z_t + u_t$$

وفي المرحلة الثانية، نستخدم طريقة (OLS) في تقدير معالم دالة الاستهلاك، أي أن:

$$b_{2SLS} = \frac{\left(\frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2} \right) \sum c_t z_t}{\left(\frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2} \right)^2 \sum z_t^2}$$

بالاختصار وإعادة الترتيب، نحصل على:

$$b_{2SLS} = \frac{\sum c_t z_t}{z_t y_t} \dots\dots\dots\dots (27)$$

وهو نفس التقدير السابق والحاصل عليه بطريقة (ILS)، أي أن في حالة التشخيص التام للمعادلة ضمن المنظومة تكون تقديرات طريقة (ILS) مطابقة تمامًا لتقديرات طريقة $(2SLS)$.

8- طريقة المتغيرات *المساعدة*: IV

تصلح هذه الطريقة، كما هو الحال بالنسبة لطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين وطريقة المربعات غير المباشرة لتقدير معالم المعادلات الهيكلية التي تكون مشخصة تمامًا، وتتمثل هذه الطريقة في اختيار عدد من المتغيرات المساعدة من بين المتغيرات الخارجية في المنظومة، بحيث تتصف أن هذه المتغيرات المساعدة بالخواص التالية:

1. أن تكون على درجة كبيرة من الارتباط بالمتغير الداخلي للمعادلة الهيكلية المطلوب تقدير معالمها.
2. أن تكون متغيرات خارجية فعلاً، أي أنها غير مرتبطة بعنصر الخطأ في المعادلة.
3. أن يكون ارتباطها منعدمًا أو ضعيفًا جدًا بالمتغيرات الخارجية أو الداخلية المرتدة زمنيًا التي تظهر في المعادلة وذلك تفاديًا لمشكلة التعدد الخطي بين المتغيرات المستقلة.

بالرجوع إلى منظومة المعادلات المرقمة (18) بالذات إلى المعادلة الأولى منها، حيث كانت نتيجة تشخيص هذه المعادلة مشخصة تمامًا، وبالتالي يمكن استخدام طريقة المتغيرات المساعدة (IV) لتقدير معالمها. وعليه يجب اختيار متغير يتصف بالخصائص المذكورة أعلاه لكي يأخذ دور المتغير المساعد في تقدير معالم هذه المعادلة، وليكن (Z_t) بحيث يكون على درجة عالية من الارتباط مع المتغير الداخلي (C_t)، إضافة إلى استقلاله عن عنصر الخطأ العشوائي (U_t)، وبإعادة كتابة المعادلة الأولى من المنظومة المذكورة، آخذين بنظر الاعتبار التقدير حول نقطة المتوسط. $c_t = \beta_1 y_t + U_t$

وبالضرب في انحرافات المتغير المساعد (Z_t) وإدخال علامة الجمع نحصل على:

$$\sum c_t z_t = \beta_1 \sum y_t z_t + \sum z_t U_t$$

حيث أن: $E(z_t U_t) = 0$ وأن: $z_t = Z_t - \bar{Z}$

يتضح من أعلاه، أن تقدير المتغيرات المساعدة للمعلمة الهيكلية (β_1) يعطى على وفق الصيغة التالية:

$$b_{1IV} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum y_t z_t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (28)$$

ويلاحظ من الصيغة رقم (28) أعلاه، أن طريقة المتغيرات المساعدة مطابقة لطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين وطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، وكما بينا سابقًا في الجزء (6-10) من هذا الفصل، فإن مثل هذه التقديرات المحتسبة على وفق الصيغ المرقمة (23)، (27) و (28)، تكون متسقة وغير متحيزة في حالة العينات الكبيرة، أي عندما $(n \to \infty)$.

تجدر الإشارة هنا إلى أن طريقة المتغيرات المساعدة تعد من الطرق السهلة لتقدير معالم معادلات النموذج الهيكلي التي تكون مشخصة تمامًا، وأهم ما يؤخذ على هذه الطريقة هو الحالة التحكيمية في اختيار المتغيرات المساعدة، أي أنه يمكن أن تتوفر عدة متغيرات بديلة، تصلح أن تكون متغيرات مساعدة وطبيعي استخدام أي واحد منها سوف يعطي تقديرات مختلفة للمعالم الهيكلية، وبالتالي يمكن القول بأنها تقديرات تحكيمية (كاظم الحسناوي، 2002 صفحة 339).

وفي الختام يتضح بأن جميع طرق تقدير معالم منظومة المعادلات الآنية، والتي تطرقنا إليها في هذا الفصل تنتهي إلى مجموعة طرق تقدير كل معادلة من المعادلات المنظومة على حدة، وتعرف أحيانًا بطرق المعادلة الواحدة. وفي الواقع هناك طرق أخرى تطبق على كل معادلات المنظومة دفعة واحدة نذكر منها: طريقة المربعات الصغرى ذات المراحل الثلاث وطريقة الإمكان الأعظم ذات المعلومات الكاملة، ومثل هذه الطرق متقدمة جدًا وتقع خارج نطاق طبيعة هذا الكتاب.

<u>مثال تطبيقي (5):</u>

قدر معالم منظومة العرض والطلب المرقمة (8) والتي تم مناقشة تشخيصها في الجزء (3-10) و (4-10) من هذا الفصل والمعاد كتابتها في أدناه:

$$D_t = A_0 + A_1 P_t + U_{1t}$$
$$S_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 W_t + U_{2t}$$

إذا علمت بأن المتغيرات الداخلية والخارجية في المنظومة أخذت البيانات التالية:

الرقم القياسي لحالة الجو	الدخل	سعر الطن	الكمية المعروضة=الكمية المطلوبة
W_t	Y_t	P_t	$D_t = S_t$
105	680	970	916

820	912	690	110
660	780	710	112
320	710	740	116
770	680	745	105
810	660	750	108
801	675	770	118
912	615	785	100
980	630	790	105
1114	620	795	110
1100	600	810	95
1330	612	820	98
1210	635	835	95
1115	625	850	87
1095	610	855	98
1200	615	870	96

الحل:

كما رأينا سـابقًا أن معادلة كل من العرض والطلب في هذه المنظومة قد اجتازت اختبار شـرط الترتيب وشـرط الرتبة وبالتالي فهي منظومة مشـخصـة تمامًا، وذلك لوجود حل وحيد لتقدير معالم كل معادلة فيها، وعليه يمكن استخدام أسلوب المربعات الصغرى غير المباشرة لتقدير معالمها، وهذا بدوره يتطلب ايجاد النموذج المختزل لكل متغير داخلي وكالآتي:

$$D_t = S_t = H_{10} + H_{11}Y_t + H_{12}W_t + V_{1t}$$
$$P_t = H_2O + H_{21}Y_t + H_{22}W_t + V_{2t}$$

وباسـتخدام أسـلوب (OLS) يمكن تقدير معالم النموذج المختزل أعلاه، بالنسـبة لنموذج العرض (أو الطلب) المختزل:

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{10} \\ \hat{\Pi}_{11} \\ \hat{\Pi}_{12} \end{bmatrix}_{LS} = (X'X)^{-1}X'S = (X'X)^{-1}X'D$$

أما بالنسبة لنموذج السعر المختزل، يقدر بموجب الصيغة التالية:

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{20} \\ \hat{\Pi}_{21} \\ \hat{\Pi}_{22} \end{bmatrix}_{LS} = (X'X)^{-1}X'P$$

حيث أن $\hat{\Pi}_{1j}$و $\hat{\Pi}_{2j}$ تمثل تقديرات للمعالم Π_{1j} و Π_{2j} وأن $J = 0,1,2,\ldots,k$

أما:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum Y_t & \sum W_t \\ \sum Y_t & \sum Y_t^2 & \sum W_t Y_t \\ \sum W_t & \sum W_t Y_t & \sum W_t^2 \end{bmatrix}, \quad X'P = \begin{bmatrix} \sum P_t \\ \sum P_t Y_t \\ \sum P_t W_t \end{bmatrix}$$

$$X'S = X'D = \begin{bmatrix} \sum S_t \\ \sum S_t Y_t \\ \sum S_t W_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum D_t \\ \sum D_t Y_t \\ \sum D_t W_t \end{bmatrix}$$

ومن البيانات المعطاة في المثال نحصل على:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & 12495 & 1658 \\ 12495 & 9809125 & 1289540 \\ 1658 & 1289540 & 172906 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 72.364967 & -0.048915 & -0.329098 \\ -0.048915 & 0.0000383 & 0.000184 \\ -0.329098 & 0.000184 & 0.001793 \end{bmatrix}$$

$$X'S = X'D = \begin{bmatrix} 15153 \\ 11987675 \\ 1546213 \end{bmatrix}, \quad X'P = \begin{bmatrix} 10949 \\ 8468720 \\ 1140566 \end{bmatrix}$$

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{10} \\ \hat{\Pi}_{11} \\ \hat{\Pi}_{12} \end{bmatrix}_{LS} = \begin{bmatrix} 72.364967 & -0.048915 & -0.329098 \\ & 0.0000383 & 0.000184 \\ & & 0.001793 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15153 \\ 11987675 \\ 1546213 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1311.31169 \\ 1.484346 \\ -14.771255 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{S}_t = \hat{D}_t = 1311.31169 + 1.484346Y_t - 14.771255\, W_t$$

في حين تقدير الصيغة المختزلة لمتغير السعر يعطى كالآتي:

$$b = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{20} \\ \hat{\Pi}_{21} \\ \hat{\Pi}_{22} \end{bmatrix}_{LS} = \begin{bmatrix} 72.364967 & -0.048915 & -0.329098 \\ & 0.0000383 & 0.000184 \\ & & 0.001793 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10949 \\ 8468720 \\ 1140566 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2716.96035 \\ -2.038093 \\ -4.305766 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{P}_t = 2716.96035 - 2.038093\, Y_t - 4.305766\, W_t$$

وباســتخدام هذه التقديرات الأولية للنموذج المختزل، يمكن الحصــول وبشــكل غير مباشــر على تقديرات معالم منظومة العرض والطلب وكالآتي:

1- تقدير معالم معادلة الطلب:

$$a_0 = \hat{\Pi}_{20}\left(\frac{\hat{\Pi}_{10}}{\hat{\Pi}_{20}} - \frac{\hat{\Pi}_{12}}{\hat{\Pi}_{22}}\right) = 2716.96035\left(\frac{1311.31169}{2716.96035} - \frac{-14.771255}{-4.305766}\right)$$

$$\therefore a_0 = -8009.425891$$

$$a_1 = \frac{\hat{\Pi}_{12}}{\hat{\Pi}_{22}} = \frac{-14.771255}{-4.305766} = 3.430575$$

$$a_2 = \hat{\Pi}_{21}\left(\frac{\hat{\Pi}_{11}}{\hat{\Pi}_{21}} - \frac{\hat{\Pi}_{12}}{\hat{\Pi}_{22}}\right) = -2.038093\left(\frac{1.484346}{-2.038093} = \frac{-14.771255}{-4.305766}\right)$$

$$\therefore a_2 = 8.476178$$

2- تقدير معالم معادلة العرض:

$$b_0 = \hat{\Pi}_{20}\left(\frac{\hat{\Pi}_{10}}{\hat{\Pi}_{20}} - \frac{\hat{\Pi}_{11}}{\hat{\Pi}_{21}}\right) = 2716.96035\left(\frac{1311.31169}{2716.96035} = \frac{1.484346}{-2.038093}\right)$$

$$\therefore b_0 = 3290.076742$$

$$b_1 = \frac{\hat{\Pi}_{11}}{\hat{\Pi}_{21}} = \frac{1.484346}{-2.038093} = -0.728301$$

$$b_2 = \hat{\Pi}_{22}\left(\frac{\hat{\Pi}_{12}}{\hat{\Pi}_{22}} - \frac{\hat{\Pi}_{11}}{\hat{\Pi}_{21}}\right) = (-4.305766)\left(\frac{-14.771255}{-4.305766} - \frac{1.484346}{-2.038093}\right)$$

$$\therefore b_2 = -17.907149$$

وعليه فإن الصيغة التقديرية لمنظومة العرض والطلب، توضع بالشكل التالي:

$$\hat{D}_t = -8009.425891 + 3.430575\, P_1 + 8.476178\, W_t$$

$$\hat{S}_t = 3290.076742 - 0.728301\, P_1 - 17.907149\, W_t$$

9- التنبؤ باستخدام منظومة المعادلات الآنية:

كما بينا في الجزء (7−2) من الفصل الثاني أن التنبؤ باستخدام المعادلة المنفردة يمكن أن يوضع بشكل تنبؤ نقطي، أي قيمة مفردة أو أن يكون تنبؤ فتروي، أي قيمة ضمن فترة محددة، حيث كانت العلاقات المدروسة تبين الأثر باتجاه واحد، وفي هذا الجزء سوف نتناول التنبؤ في حالة منظومة المعادلات الآنية والتي بموجبها يدرس الأثر المباشر وغير المباشر بين المتغيرات الداخلية والخارجية المتضمنة في معادلات المنظومة بالرجوع الى النموذج الهيكلي المرقم (4) والمعاد كتابته أدناه:

$$\beta Y_t + \Gamma X_t = \mu_t$$

مصفوفة (β) في الحد الأول تتضمن المعالم الخاصة بالمتغيرات الداخلية، في حين مصفوفة (Γ) تتضمن المعالم ذات العلاقة بالمتغيرات الداخلية والخارجية المرتدة زمنيًا، عليه فإن الشكل الهيكلي أعلاه يبين الأثر المباشر وغير المباشر والمتولد نتيجة للترابط والتشابك بين معادلات منظومة المعادلات الآنية.

إن التنبؤ باستخدام منظومة المعادلات الآنية عملية صعبة ومعقدة، لذا سوف أحاول الخوض في هذا الموضوع من خلال إعطاء أمثلة بسيطة.

<u>مثال تطبيقي (6):</u>

منظومة المعادلات التالية تمثل الشكل الهيكلي لنموذج اقتصادي بسيط متضمن أربعة معادلات ومتطابقة:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1(Y_t - T_t) + \mu_{1t}$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \mu_{2t}$$
$$T_t = \lambda Y_t + \mu_{3t}$$
$$M_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 P_{t-1} + \mu_{4t}$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t + E_t - M_t$$

المنظومة أعلاه تتضمن خمسة متغيرات داخلية وهي: C_t تمثل الاستهلاك الخاص، I_t: تمثل الاستثمار، T_t: تمثل الضرائب، M_t: تمثل الاستيرادات، Y_t: تمثل الدخل في حين هناك متغيران خارجيان وهما G_t: تمثل الانفاق الحكومي، E_t: تمثل الصادرات، أما Y_{t-1}: يمثل متغير داخلي مرتد زمنيًا للدخل، P_{t-1}: يمثل متغير خارجي مرتد زمنيًا للأسعار.

بتوفير البيانات اللازمة لكافة المتغيرات الداخلية والخارجية وكذلك المتغيرات المرتدة زمنيًا أمكن تقدير معالم المعادلات السلوكية الأربعة الأولى، حيث كانت معادلات المنظومة في حالة على وفق التشخيص، لذا اختير الأسلوب الملائم لعملية التقدير وكانت النتيجة كالآتي:

$$\hat{C}_t = 20 + 0.8(Y_t - T_t)$$
$$\hat{I}_t = 2 + 0.1Y_t + 0.3Y_{t-1}$$
$$\hat{T}_t = 0.2Y_t$$
$$\hat{M}_t = 3 + 0.1\,Y_t + 0.1\,P_{t-1}$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t + E_t - M_t$$

الآن وبعد تقدير المعالم الهيكلية، يمكن إجراء التنبؤ بما ســتكون عليه قيم المتغيرات الداخلية بالمســتقبل، فعلى فرض بأن المتغيرات الخارجية والمتغيرات المرتدة زمنيًا سوف يكون كالآتي:

$$G_t = 20, \qquad E_t = 10, \qquad Y_{t-1} = 150, \quad P_{t-1} = 110$$

بإدخال هذه القيم في الشــكل الهيكلي المقدر وتحويل كل المتغيرات الداخلية إلى الجهة اليســرى من المنظومة نحصل على:

$$C_t = 0.8Y_t + 0.8\,T_t = 20$$
$$I_t - 0.1\,Y_t = 2 + 0.3\,(150) = 47$$
$$T_t = 0.2\,Y_t$$
$$M_t - 0.1\,Y_t = 3 + 0.1(110) = 14$$
$$Y_t - C_t - I_t + M_t = 20 + 10 = 30$$

وبالتعويض عن قيمة T_t بما تساويها $(T_t = 0.2\,Y_t)$ في معادلة الإنفاق الخاص نحصل على:

$$C_t - 0.8\,Y_t + 0.8\,(0.2\,Y_t) = 20$$
$$\therefore C_t - 0.8\,Y_t + 0.16\,Y_t = 20$$
$$\therefore C_t = 20 + 0.64\,Y_t$$

وبالتالي فإن التعويض عن قيمة الاســتهلاك الخاص (C_t) والاســتثمار (I_t) والاســتيرادات (M_t) في المتطابقة، نحصل على قيمة للدخل (Y_t) وكالآتي:

$$Y_t - (20 + 0.64Y_t) - (47 + 0.1Y_t) + (14 + 0.1\,Y_t) = 30$$
$$\therefore 0.36\,Y_t = 83 \;\Rightarrow\; Y_t = 230.5$$

وبالتعويض عن قيمة الدخل الحاصل عليه في أعلاه مرة أخرى في صيغة الاستهلاك نحصل على:

$$C_t - 0.64(230.5) = 20$$
$$\therefore C_t = 167.5$$

في حين التعويض في صيغة الاستثمار يعطي النتيجة التالية:

$$I_t - 0.1(230.5) = 47$$
$$\therefore I_t = 70$$

أما قيمة الضرائب (T_t)، نحصل عليها كذلك بالتعويض عن (Y_t) بما يساويها أي أن:

$$T_t = 0.2(230.5) = 46.1$$

وأخيراً قيمة الاستيرادات سوف تبلغ المستوى التالي:

$$M_t - 0.1(230.5) = 14$$
$$\therefore M_t = 37$$

يتضح من أعلاه، أنه قد تم حل منظومة المعادلات الآنية لكل متغير داخلي فيها وبالتالي التنبؤ بما سوف تكون عليه هذه المتغيرات الداخلية عندما أخذت الخارجية والمرتدة زمنيًا مستوى معين، عليه فإن القيم التنبئية لكافة المتغيرات الداخلية يمكن إجمالها بالشكل التالي:

$$C_t = 167.5, \quad T_t = 46.1, \quad Y_t = 230.5, \quad I_t = 70, \quad M_t = 37$$

وهكذا لأي مستوى معطى للمتغيرات الخارجية والمتغيرات المرتدة زمنيًا، يمكن إيجاد القيم المستقبلية (التنبؤية) لكل المتغيرات الداخلية في المنظومة المدروسة (كاظم الحسناوي، 2002 صفحة 340).

تجدر الإشارة هنا إلى أن عملية التنبؤ أعلاه قد تمت بإجراء التعويض المتتابع بكل معادلة من معادلات المنظومة الآنية وذلك بعد معرفة المستوى المطلوب لكل متغير خارجي في المنظومة. نفس النتيجة أعلاه يمكن الحصول عليها باستخدام أسلوب المصفوفات والموجهات. وبالرجوع إلى الشكل الهيكلي المرقم (4) وإعادة كتابة معادلات المنظومة المقدرة كالآتي: $\beta Y + \Gamma X$

حيث أن: β, Γ مصفوفات مربعة تمثل كل واحدة منها المعلام المقدرة للمتغيرات الداخلية والخارجية على التوالي، وذات مرتبة مساوية إلى عدد معادلات المنظومة.

حيث إن:

Y: تمثل موجة المتغيرات الداخلية في المنظومة.

X: تمثل موجة للمتغيرات الخارجية، علمًا بأن العنصر الأول منه مساويًا إلى الواحد لتمثيل الحد الثابت في المنظومة.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.8 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ T_t \\ M_t \\ Y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ E_t \\ P_{t-1} \\ G_t \\ Y_{t-1} \end{bmatrix}$$

وبإعادة الترتيب نحصل على: $Y = -\beta^{-1}\Gamma X$

$$\therefore Y = \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ T_t \\ M_t \\ Y_t \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.8 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 110 \\ 20 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ T_t \\ M_t \\ Y_t \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2.778 & 1.777778 & -2.222222 & 1.777778 & 1.777778 \\ 0.278 & 1.277778 & -0.222222 & -0.277778 & 0.277778 \\ 0.556 & 0.555556 & 0.555556 & -0.555556 & 0.555556 \\ 0.278 & 0.2777778 & -0.222222 & 0.722222 & 0.277778 \\ 2.778 & 2.777778 & -2222222 & -2.777778 & 2.777778 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 110 \\ 20 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ T_t \\ M_t \\ Y_t \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} -53.78 & -1.777778 & 0.177778 & 1.777778 & -0.533333 \\ -7.278 & -0.2777778 & 0.027778 & -0.277778 & 0.383333 \\ -10.56 & -0.555556 & 0.055556 & -0.555556 & -0.166667 \\ -8.278 & -0.277778 & -0.072222 & -0.277778 & -0.083333 \\ -52.78 & -2.777778 & 0.277778 & -2.77778 & -0.833333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 110 \\ 20 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ T_t \\ M_t \\ Y_t \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -167.5556 \\ -70.05556 \\ -46.11111 \\ -37.05556 \\ -230.5556 \end{bmatrix}$$

ومنه يتضح بأن القيم التنبؤية لكافة المتغيرات الداخلية مطابقة تمامًا لما تم الحصول عليه سابقًا، أي أن:

$$C_t = 167.5 \ , \ I_t = 70 \ , \quad T_t = 46.1 \ , \quad M_t = 37 \ , \quad Y_t = 230.5$$

<u>التمارين:</u>

1-أ-ماذا نقصد باختزال النماذج القياسية وكيف يتم الاختبار لتشخيصها؟

ب- قارن بين أسلوب التقدير بطريقة $(2SLS)$ وأسلوب التقدير بطريقة (IV)، متى يتساوى التقدير بموجب هاتين الطريقتين.

2-اختزل النموذج الهيكلي التالي لكل متغير داخلي فيه:

$$C_t = A_0 + A_1 Y_t + U_t$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + U_t$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

حيث أن: C_t، I_t، Y_t متغيرات داخلية وتمثل الاستهلاك والاستثمار والدخل على التوالي .

أما (G_t) فيمثل الإنفاق الحكومي وهو متغير خارجي، Y_{t-1}، متغير داخلي مرتد زمنيًا بسنة واحدة. ثم وضّح العلاقة بين معالم النموذج الهيكلي ومعالم النموذج المختزل.

3-شخّص كل علاقة من علاقات النموذج التالي:

$$P_t = \beta_1 W_1 + \gamma_1 Q_1 + \gamma_2 P_{t-1} + U_1$$

$$W_t = \beta_2 P_t + \beta_3 N_t + \gamma_3 S_t + \gamma_4 W_{t-1} + U_2$$
$$N_t = \beta_4 W_t + \gamma_5 S_t + \gamma_6 P_{t-1} + \gamma_7 W_{t-1} + U_3$$

هل نتيجة التشخيص أعلاه تتأثر إذا كانت: $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_6 = \beta_2 = 0$

4-اختزل النموذج التالي لكل من الاستهلاك (C_t) والاستثمار (I_t) والدخل القومي (Y_t)

$$C_t = \gamma_1 + \gamma_2 Y_t + U_t$$
$$I_t = \beta_1 + \beta_2 (Y_t - Y_{t-1}) + U_t$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

حيث أن: C_t ، I_t ، Y_t متغيرات داخلية.

Y_{t-1} متغير داخلي مرتد زمنيًا

G_t متغير خارجي.

ثم بين مدى التأثير الناتج من جراء تغير النفقات الحكومية (G_t) .

5-فرضًا لديك منظومة المعادلات الآنية التالية:

$$C_t = A_0 + A_1 (Y_t - T_t) + U_t$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + U_2$$
$$T_t = QY_t$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

أ-شخص كل علاقة من علاقات المنظومة أعلاه.

ب-استخدم البيانات في الجدول أدناه لتطبيق طريقة (OLS) في تقدير معالم المنظومة، وقارن النتيجة مع الأسلوب الملائم والمقترح نتيجة التشخيص الحاصل عليه من (أ) أعلاه، لتقدير معالم النموذج الهيكلي.

G_t	Y_{t-1}	T_t	Y_t	I_t	G_t
73.4	293.2	43.7	306.6	60.9	230.7
70.2	306.6	44.2	304.9	65.8	245.1
68.3	304.9	45.9	333.0	71.3	255.2
72.9	333.0	51.6	352.8	73.8	265.5
80.2	352.8	56.2	368.2	76.9	280.3
84.8	368.2	56.2	370.0	77.0	291.1
88.3	370.0	63.3	402.4	80.5	308.2
91.2	402.4	70.3	417.1	85.9	326.5

99.0	417.1	72.4	430.6	85.7	336.6
107.2	430.6	79.8	460.6	94.0	356.6
112.2	460.6	86.2	485.3	99.5	376.6
118.6	485.3	85.6	521.7	108.0	402.9
126.2	521.7	93.4	568.4	120.0	434.7
146.9	568.4	114.4	625.1	130.0	468.3
168.3	625.1	123.2	659.0	133.9	494.3
184.6	659.0	142.6	719.8	146.2	538.9