**مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء**

مشـــكلة تباين الخطأ أو ما تســـمى باختلاف التباين تتكون من كلمتين (Hetro) بمعنى غير متســـاو و(Scedasticity) بمعنى تباعد أو انتشـار، أي أنها تعني (انتشـار غير متسـاو)، وسـوف يتم تناولها في هذا المبحث لمعرفة الآتي:

- طبيعة مشكلة تباين الخطأ.
- أسباب تباين الخطأ.
- أهم اختبارات الكشف عن مشكلة تباين الخطأ.
- طرق علاج مشكلة تباين الخطأ.

**1- طبيعة مشكلة عدم ثبات التباين:**

إحـدى الفرضـــيـات الأســـاســـيـة في تحليـل الانحـدار هي ثبـات تبـاين الأخطـاء العشـــوائيـة (Homoscedasticity)، ويعني ذلك أن متوســـط الفرق بين المشـــاهدات المتجاورة يجب ألاَّ يزداد أو ينقص بشكل كبير مع مرور الزمن، وخلاف ذلك يعني أن البيانات تتصف بما يسمى بعدم تجانس التباين.

قد لا تكون قيمة تباين حد الخطأ لمعامل الإزعاج ( $\sigma^2\mu$) ثابتة واقعيًا أي أن: $E(\mu_\tau^2) = \sigma^2$

فعند تغير قيمة تباين حد الخطأ $(\mu_\tau)$، بحيث تزداد هذه القيمة بزيادة قيمة المتغير المســـتقل $(\gamma_\tau)$، فإننا نواجه مشكلة تباين حد الخطأ، بمعنى أن الأخطاء المعيارية لمعامل حد الإزعاج أو الخطأ ليس لها التباين نفسه لكل المشاهدات.

وتؤثر هذه المشكلة بشكل أساسي على دقة تقديرات ميل خط الانحدار، وخاصة في حالة العينات الصغيرة، ممَّا ينعكس ذلك على استخدام النموذج المقدر في التنبؤ.

**ملحوظة:** يلاحظ أنه من الصـعب وجود مشـكلة اختلاف التباين في بيانات السـلاسـل الزمنية على عكس البيانات المقطعية (الرشيد صفحة 190).

**2-أسباب مشكلة عدم ثبات التباين:**

من أهم الأسباب التي تؤدِّي لظهور مشكلة عدم ثبات التباين:

1. وجود علاقة ذات اتجاهين بين المتغيرات الداخلية.

2. استخدام البيانات القطاعية بدلاً من بيانات سلسلة زمنية.

3. استخدام بيانات جزئية بدلاً من البيانات التجمعية، فعند استخدام بيانات تجمعية تختفي الاختلافات بين المفردات، حيث يلغي بعضها البعض، فلا يكون هناك مجال تشتت القيم بدرجة كبيرة، أما في حالة البيانات الجزئية، فعادة ما يكون التشتت كبيرَ القيم.

4. تحسين أساليب جمع البيانات وطرق القياس، حيث إن تباين حد الخطأ يقل مع جمع البيانات الدقيقة والواقعية، مثلاً الأخطاء التي ترد في المستندات في المؤسسات الحكومية، والتي تستخدم الحاسب الآلي لتحليل البيانات تكون أقل من مثيلتها من المؤسسات التي لا تستخدم الحاسب الآلي.

5. سلوكية وتصرف الأفراد تقل الأخطاء فيها بمرور الزمن، وعليه فإن تباين حد الخطأ يتناقص هو الآخر خلال الفترة الزمنية.

**3- الآثار المترتبة على وجود مشكلة عدم ثبات التباين:**

من أهم الأسباب والآثار المترتبة لظهور مشكلة عدم ثبات التباين:

1. بما أن صفة عدم الانحياز تعتمد على افتراض أن متوسط الخطأ العشوائي يساوي الصفر $(E(U) = 0)$ فإن تقدير المربعات الصغرى سيبقى خطيًا وغير منحاز حتى في ظل عدم ثبات التباين.

2. إن تقدير التباين المقدر في ظل وجود مشكلة اختلاف التباين لا يكون أقل ما يمكن ممَّا يفقد طريقة المربعات الصغرى صفة الكفاءة، حيث إن تقدير المربعات الصغرى لتباين المعلمات سوف يكون منحازا للأعلى أو للأسفل الأمر الذي يترتب عليه دقة الانحرافات المعيارية، وبالتالي عدم صحة اختبارات (t) و (f) وعدم دقة مدى الثقة حول معلمات النموذج.

3. التنبؤ بقيمة المتغير التابع (Y) عند أي قيمة معطاة للمتغير المستقل (X)، والذي يعتمد على التقديرات من البيانات الأصلية يكون له تباينًا كبيرًا، بمعنى أن التنبؤ يكون غير كفء، وذلك لأن تباين القيمة المتنبأ بها يتضمن المشكلة بالداخل (الرشيد صفحة 195).

**4-أهم اختبارات الكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين:**

توجد هنالك عدة اختبارات للكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين نجد من أهمها:

**أولاً: اختبار الرسم البياني Plot Test**

وفقا" لهذه الطريقة يتم اختبار $(\widehat{U}_i^2)$، وذلك برسم مشاهدات هذا المتغير مقابل مشاهدات $(\widehat{Y}_i)$، فإذا ظهر هناك نمط منتظم Systematic Pattren، بمعنى كانت الأخطاء متجانسة، بحيث لا توجد أنماط مختلفة البواقي، فإن هذا يعني أن هناك ثبات تباين المتغير العشوائي؛ أما إذا كانت الأخطاء غير متجانسة، معنى ذلك أن هناك اختلافٌ في الشكل النظامي، وبالتالي وجود أنماط محدَّدة تدلل على وجود عدم تجانس التباين. وبدلاً من الرسم الانتشاري لـ$(\widehat{U}_i^2)$ و$(\widehat{Y}_i)$ ممكن أن نضع $(\widehat{U}_i^2)$ مقابل $(\widehat{Y}_i)$ أحد المتغيرات المستقلة، خصوصًا إذا كانت نتيجة الشكل الانتشاري لـ$(\widehat{U}_i^2)$ مقابل $(\widehat{Y}_i)$ لا يظهر نمطًا نظاميًا بين المتغيرين؛ فيكون هناك (XI) مقابل $(\widehat{U}_i^2)$، لكن هذه الحالة لا تصلح عندما يكون هناك أكثر من متغير واحد، والسبب في ذلك هو أن طريقة المربعات الصغرى المقدرة لا توضح بسهولة الرسم الانتشاري على الشكل البياني، فنقوم برسم $(\widehat{U}_i{}^2)$ مقابل كل متغير مستقل أو مقابل الزمن، من أجل معرفة، فيما إذا كانت البواقي تتغير بطريقة نظامية ذات صلة بالمتغير المقابل لها، وبذلك ننتقل إلى طريقة رسم بياني ذي شكل مختلف، تسمى طريقة الرسم البياني للتتابع الزمني Time Sequence Plot، ويمكن بموجبها توضيح العلاقة بين البواقي والزمن بيانيًا بجعل الزمن على المحور الأفقي والبواقي على المحور العمودي، فتظهر أشكالاً لأنماط محدَّدة، قد يدل أحدها على أنه لا يوجد تأثير طويل المدى للزمن على المتغير العشوائي (U) في حالة عدم زيادة تباين البواقي مع التزايد في قيم المتغير المستقل $(X)$، وهذا يعني تجانس تباين المتغير العشوائي.

من جانب آخر، قد يظهر الشكل الانتشاري نمطًا آخر، يبين أن تباين البواقي يتزايد تناسبيًا مع التزايد في (X)، والذي يعني أن النموذج في حالة عدم التجانس، أما إذا تبين في الشكل الانتشاري أن العلاقة خطية أو تربيعية، فهذا يعني أن النموذج المستخدم في التحليل غير صحيح، ممَّا خلق حالة من عدم التجانس، لذا يجب تحويل البيانات عن طريق قسمة طرفي معادلة الانحدار للنموذج الأصلي على $(X)$ من أجل إلغاء حالة عدم التجانس.

**ثانيا: اختبار معامل ارتباط الرتب**

يعتبر هذا الاختبار من أهم وأبسط الاختبارات المستخدمة في اكتشاف مشكلة تباين حد الخطأ، ويعتمد على القيم المطلقة للانحرافات (e)، وقيم المتغير المستقل موضع الدراسة (x)، حيث يقيس معامل ارتباط الرتب لسبيرمان درجة الارتباط بين مجموعتين من الرتب.

ويتم ذلك وفقًا" للخطوات التالية:

-بافتراض أننا بصدد دراسة نموذج الانحدار الخطي البسيط التالي: $Y = B_0 + B_1 + U$

ولاكتشاف مشكلة تباين حد الخطأ في هذا النموذج نتبع الخطوات التالية:

- تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) للحصول على النموذج المقدر $\hat{y} = \alpha + \beta x$.
- يتم إيجاد قيم البواقي التي تمثل تقدير قيم حد الخطأ (e).
- يتم ترتيب القيم المطلقة للبواقي (e) أو إهمال إشاراتها وقيم المتغير المستقل (x) تصاعديًا" أو تنازليًا"، وتعطى لكل منها رتبة وفق تسلسل القيم في الترتيب (مع ملاحظة أخذ متوسط الرتب للقيم المكررة، وإعطاء هذا المتوسط لكل قيمة منها).
- تقدير معامل ارتباط الرتب لسبيرمان باستخدام الصيغة التالية: $r = 1 - \frac{6d2}{n(n2-1)}$

حيث أن:

$d$ تمثل الفرق مابين رتبة القيم المطلقة لحد الخطأ (e)، ورتبة المتغير المستقل(x) المناظرة.

N عدد المشاهدات.

1. إيجاد قيمة (T) المحسوبة باستخدام الصيغة التالية: $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r2}}$
2. إيجاد قيمة $(T)$ الجدولية، وذلك من جدول توزيع $(T)$ عند درجات حرية $(N - K + 1)$ ومستوى معنوية.(%5)
3. إجراء مقارنة بين قيمة (T) المحسوبة مع قيمة (T) الجدولية، فإذا كانت قيمة (T) المحسوبة أكبر من قيمة (T) الجدولية نقبل فرضية العدم القائلة بوجود مشكلة عدم ثبات التباين، أما إذا كانت قيمة (T) المحسوبة أقل من قيمة (T) الجدولية نرفض فرضية العدم، ونقبل الفرضية البديلة القائلة بوجود مشكلة تباين حد الخطأ.

**ملحوظة:** كلما كانت قيمة معامل ارتباط الرتب عالية وقريبة من الواحد الصحيح، دل ذلك على وجود علاقة قوية بين انحرافات حد الخطأ والمتغير المستقل، وبالتالي يكون هناك وجود علاقة تباين حد الخطأ.

**نموذج تطبيقي:** البيانات التالية تمثل حجم الاستهلاك (y) ومستوى الدخل (x) خلال الفترة (2000-2009)

| السنة | الاستهلاك | الدخل |
|---|---|---|
| 2000 | 40 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 44 | 2001 |
| 12 | 46 | 2002 |
| 14 | 48 | 2003 |
| 16 | 52 | 2004 |
| 18 | 58 | 2005 |
| 22 | 60 | 2006 |
| 24 | 68 | 2007 |
| 26 | 74 | 2008 |
| 32 | 80 | 2009 |

**المطلوب:** استخدام اختبار معامل ارتباط الرتب في اكتشاف مشكلة تباين حد الخطأ.

**خطوات الحل:**

**1. تقدير النموذج:** باســتخدام طريقة المربعات الصــغرى (OLS) يتم تقدير نموذج الانحدار، وذلك على النحو التالي:

بافتراض أن x هو الدخل، y هي الاستهلاك، يمكن أن يتم حساب المجاميع التالية:

| الدخل $x$ | الاستهلاك$y$ | $x\,y$ | $x^2$ | المجاميــع المطلوبة |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 40 | 240 | 36 | إذًا الوسط الحسابي: |
| 10 | 44 | 440 | 100 | $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{180}{10} = 18$ |
| 12 | 46 | 552 | 144 | |
| 14 | 46 | 672 | 196 | |
| 16 | 25 | 832 | 256 | $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{570}{10} = 57$ |
| 18 | 58 | 1044 | 324 | |
| 22 | 60 | 1320 | 484 | |
| 24 | 68 | 1632 | 576 | |
| 26 | 74 | 1924 | 676 | |
| 32 | 80 | 2560 | 1024 | |
| 180 | 570 | 11216 | 3816 | |

- يمكن حساب $\hat{\beta}_1$ كما يلي:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{(10)(11216) - (180)(570)}{(10)(3816) - (320)^2} = \frac{956}{576} = 1.66$$

حساب $\hat{\beta}_0$ كما يلي: $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 57 - (1.66)(18) = 27.12$

– إذًا معادلة الانحدار المقدرة، هي: $\hat{y} = 27.12 + 1.66\,x$

**2. تقدير قيمة الخطأ العشوائي $(e)$:**

بالتعويض عن قيم المتغير المستقل $(x)$ في معادلة الانحدار المقدرة نحصل على قيم الخطأ (e).

| الدخل $x$ | الاستهلاك$y$ | $Y$ | الخطأ $E = y$ |
|---|---|---|---|
| 6 | 40 | 37.08 | 2.92 |
| 10 | 44 | 43.72 | 0.28 |
| 12 | 46 | 47.04 | −1.04 |
| 14 | 48 | 50.36 | −2.36 |
| 16 | 25 | 53.68 | −1.68 |
| 18 | 58 | 57 | 1 |
| 22 | 60 | 63.64 | −3.64 |
| 24 | 68 | 66.96 | 1.04 |
| 26 | 74 | 70.28 | 3.72 |
| 32 | 80 | 80.24 | −0.24 |

**3- تقدير معامل ارتباط الرتب لسبيرمان:**

باستخدام معامل سبيرمان يتم الحصول على الارتباط بين القيم المطلقة لقيم حد الخطأ والمتغير المستقل (X)، وذلك على النحو التالي:

| الدخل $x$ | الاستهلاك $y$ | الخطأ $E = y$ | رتب $x$ | رتب $e$ | $d$ | $D_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 40 | 2.92 | 1 | 8 | −7 | 49 |
| 10 | 44 | 0.28 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 12 | 46 | −1.04 | 3 | 4.5 | −1.5 | 2.25 |
| 14 | 48 | −2.36 | 4 | 7 | −3 | 9 |
| 16 | 25 | −1.68 | 5 | 6 | −1 | 1 |

| 16 | 58 | 1 | 6 | 3 | 3 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 60 | $-3.64$ | 7 | 9 | $-2$ | 4 |
| 24 | 68 | 1.04 | 8 | 4.5 | 3.5 | 12.25 |
| 26 | 74 | 3.72 | 9 | 10 | $-1$ | 1 |
| 32 | 80 | $-0.24$ | 10 | 1 | 9 | 81 |
| $TOTAL$ | | 0 | | | | 168.5 |

$$R(e-x) = 1 - \frac{6\sum d2}{n(n2-1)} = 1 - \frac{(6)(168.5)}{(10)(100-1)} = 1 - \frac{1011}{990} = 1 - 1.02$$
$$= -0.02$$

**4- تقدير قيمة (t) المحسوبة:**

يتم في هذه الخطوة تقدير قيمة (t)، وذلك وفقًا" للصيغة التالية:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r2}} = \frac{(-0.02)\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-(-0.02)2}} = \frac{0.057}{0.99} = 0.58$$

**5- تقدير قيمة (t) الجدولية:**

يتم في هذه الخطوة تقدير قيمة (t) الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجات حرية $n-2 = 10 = 2 = 8$، ونجدها تساوي 3.2

**6. يتم مقارنة قيمة $(t)$ المحسوبة مع قيمة $(t)$ الجدولية**، حيث نجد أن قيمة $(t)$ المحسوبة أقل من قيمة $(t)$ الجدولية، ولذلك نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل بعدم وجود مشكلة تباين حد الخطأ (عدم التجانس).

**ثالثا: اختبار بارك park test**

يقوم هذا الاختبار على الخطوات التالية:

بافتراض أننا بصدد دراسة نموذج الانحدار الخطي البسيط التالي: $Y = \alpha + \beta X + u$

ولاكتشاف مشكلة تباين حد الخطأ في هذا النموذج نتبع الخطوات التالية:

1. تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) للحصول على النموذج المقدر: $\hat{Y} = \hat{\alpha} +$

2. يتم إيجاد قيم البواقي التي تمثل تقدير قيم حد الخطأ (e).

3. يتم تطبيق طريقة المربعات الصغرى (OLS) في إجراء انحدار (Lne2) على (Lnx) للحصول على:

$$\ln \widehat{e2} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} Ln\, X$$

4. إيجاد قيمة $(T)$ المحسوبة بالنسبة لمعامل الانحدار $(B)$ كما يلي: $t = \frac{\hat{B}}{SE(B)}$

5. إيجاد قيمه (T) الجدولية، وذلك من جدول توزيع (T) عند درجات حرية $(N - K + 1)$ ومستوى معنوية(5%).

6. نقارن قيمة (t) المحسوبة مع قيمة (t) الجدولية: إذا كانت t المحسوبة أكبر من (t) الجدولية نرفض فرضية العدم، ونقبل الفرض البديل القائل بأن $B_1 \neq 1$ ويدل ذلك على وجود مشكلة تباين حد الخطأ، والعكس كذلك إذا كانت (t) المحسوبة أقل من (t) الجدولية نقبل فرض العدم، وهذا يعني عدم وجود مشكلة تباين حد الخطأ (الرشيد صفحة 200).

**رابعًا: اختبار جولدفيلد – كوانت Goldfeld- Quandt test**

تم اقتراح هذا الاختبار بواسطة كل من جولدفيلد – كوانت عام 1965 وتقوم فكرة هذا الاختبار على أنه لو ظل تباين البواقي متساويًا عبر المشاهدات كلها، فإن هذا التباين بالنسبة لجزء من العينة سوف يكون مساويًا لتباين جزء آخر من العينة نفسها, ولذا تقسم العينة إلى ثلاثة اقسام، ويستبعد القسم في المنتصف، ثم يتم حساب تباين البواقي بالنسبة للجزء الأول والجزء الثالث ويتم اختبار مدى تساويهما باستخدام اختبار (F). ويتم ذلك وفقاً للخطوات التالية:

1. يتم تحديد متغير يعتقد أن تباين البواقي () على ارتباط به، وقد يكون هذا المتغير أحد المتغيرات التفسيرية في النموذج، أو قد يكون متغيرًا مستحدثًا من أحد هذه المتغيرات التفسيرية، كالتربيع أو اللوغاريتم الطبيعي. (نفترض أن هذا المتغير هو $(Z)$.
2. يتم ترتيب البيانات وفقًا لترتيب قيم المتغير الذي تم اختياره في الخطوة السابقة (Z) تصاعديًا.
3. نقوم بتقسيم عدد المشاهدات في العينة إلى ثلاثة أجزاء؛ الجزء الأول حجمه $(N_1)$، والجزء الثالث $(N_2)$، والجزء الأوسط يتراوح مابين $(N_1 + 1)$ إلى $(N_2 + 1)$، فمثلا" إذا افترضنا أن حجم العينة (30) يمكن أن يكون الجزء الأول من $10 = (10 - 1)$ والجزء الأخير $(N_2)$ من $10 = (30 - 21)$ والجزء الأوسط الذي يتم استبعاده يكون "تحكميًا" ويتراوح ما بين (سدس إلى ثلث) المشاهدات الكلية.

**ملاحظة:** يجب مراعاة أن يكون $(N_1)$ و $(N_2)$ أكبر من عدد المعلمات المقدرة في كل مرة حتى تكون درجات الحرية أكبر من الصفر.

4. نقوم بتقدير معادلة انحدار مستقلة للجزء الأول والجزء الأخير من العينة.

5. نحصل على مجموع مربعات الأخطاء لكل انحدار، وذلك على النحو التالي:

$$ESS_1 = \sum e_1^2$$

$$ESS_2 = \sum e_2^2$$

6. يتم تقدير قيمة (F) المحسوبة باستخدام الصيغة التالية:

$$FC = \frac{ESS_2/N_2 - K}{ESS_1/N_1 - K} = \frac{\sigma 2(2)/N_2 - K}{\sigma 2(1)/N_1 - K}$$

7. يتم اختبار هل هنالك اختلاف جوهري بين تباين العينة الأولى $(\sigma_1^2)$ وتباين العينة الأخيرة $(\sigma_2^2)$، وذلك من خلال الفروض التالية:

- فرض العدم $(\sigma 2(1) \neq \sigma 2(2))$ ثبات تباين البواقي.
- الفرض البديل $(\sigma 2(1) \neq \sigma 2(2))$ عدم ثبات تباين البواقي.

8. إيجاد قيمة (F) الجدولية من جدول (F) عند مستوى معنوية (5%) ودرجات حرية $(N_1 - K)$ و $(N_1 - K)$.

9. نقارن قيمة (F) المحسوبة مع قيمة (F) الجدولية: إذا كانت قيمة (F) المحسوبة أكبر من (F) الجدولية نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل القائل باختلاف التباين، وبالتالي وجود مشكلة تباين حد الخطأ، والعكس كذلك إذا كانت (F) المحسوبة أقل من (F) الجدولية نقبل فرض العدم القائل بإثبات التباين، وبالتالي عدم وجود مشكلة تباين حد الخطأ.

**نموذج تطبيقي:** البيانات التالية تم تقديرها من عينة حجمها (20) مشاهدة باستخدام نموذج الانحدار البسيط, حيث $(X)$ تشير إلى المتغير المستقل، و(e) تشير للبواقي المقدرة:

| المشاهدة | $X$ | e |
|---|---|---|
| 1 | 20 | 0 |
| 2 | 25 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 30 | 3 |
| 13 | 35 | 4 |
| −3 | 20 | 5 |
| −8 | 25 | 6 |
| −15 | 35 | 7 |
| 3 | 20 | 8 |
| −10 | 30 | 9 |
| −17 | 35 | 10 |
| 5 | 40 | 11 |
| 2 | 25 | 12 |
| 25 | 40 | 13 |
| −5 | 30 | 14 |
| 20 | 35 | 15 |
| 15 | 30 | 16 |
| −20 | 40 | 17 |
| 30 | 45 | 18 |
| −37 | 45 | 19 |
| −9 | 45 | 20 |

**مطلوب:** استخدام اختبار جولدفيلد – كوانت لاكتشاف مشكلة تباين حد الخطأ.

**خطوات الحل:**

1. نقوم بترتيب البيانات تصاعديًا وفقًا للمتغير المستقل (x)، وذلك كما يلي:

| المشاهدة | $X$ | $e$ |
|---|---|---|
| 1 | 20 | 5 |
| 2 | 20 | −3 |
| 3 | 20 | 3 |
| 4 | 25 | 8 |
| 5 | 25 | −8 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 25 | 6 |
| 2 | 30 | 7 |
| −10 | 30 | 8 |
| −5 | 30 | 9 |
| 15 | 30 | 10 |
| 13 | 35 | 11 |
| −15 | 35 | 12 |
| −17 | 35 | 13 |
| 20 | 30 | 14 |
| 5 | 40 | 15 |
| 25 | 40 | 16 |
| −20 | 4 | 17 |
| 30 | 45 | 18 |
| −37 | 45 | 19 |
| −9 | 45 | 20 |

2. نقوم بتقسيم بيانات العينة إلى ثلاثة مجموعات، وذلك على النحو التالي:

- المجموعة الأولى: $(n_1) = 8$ مشاهدات من$(1 - 8)$.
- المجموعة الأخيرة $(n_2) = 8$ مشاهدات من$(13 - 20)$.
- المجموعة الوسطى والمستبعدة $= 4$ من $(9 - 12)$.

3. نقوم بحســـاب مجموع مربعات البواقي للمجموعتين الأولى والأخيرة، وذلك كما هو موضـــح في الجدول التالي:

- **المجموعة الأولى:**

| المشاهدة | $e$ | $e_2$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | −3 | 9 |
| 3 | 3 | 9 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 8 | 64 |
| 5 | −8 | 64 |
| 6 | 2 | 4 |
| 7 | 3 | 9 |
| 8 | −10 | 100 |
| المجموع | | 256 |

- **المجموعة الثانية:**

| المشاهدة | $e$ | $e_2$ |
|---|---|---|
| 13 | −17 | 289 |
| 14 | 20 | 400 |
| 15 | 5 | 25 |
| 16 | 25 | 625 |
| 17 | −20 | 400 |
| 18 | 30 | 900 |
| 19 | −37 | 1369 |
| 20 | −9 | 81 |
| المجموع | | 4089 |

4. نقوم بتقدير قيمة (F) المحسوبة، وذلك على النحو التالي:

$$FC = \frac{ESS_2/N_2 - K}{ESS_1/N_1 - K} = \frac{\sigma 2(2)/N_2 - K}{\sigma 2(1)/N_1 - K} = \frac{4089(8-2)}{259(8-2)} = \frac{681.5}{43.17} = 15.8$$

5. نوجد قيمة (F) الجدولية من جدول توزيع (F) عند مستوى معنوية (5%) ودرجات حرية للبسط $(N_1 - \mathrm{K} = 8 - 2 = 6)$ والمقام $(N_2 - \mathrm{K} = 8 - 2 = 6)$، ونجدها من الجدول تساوي (4.28)

6. نقارن قيمة (F) المحسوبة بقيمة (F) الجدولية، ويتضح من المقارنة أن قيمة (F) المحسوبة أكبر من قيمة (F) الجدولية، ولذلك نرفض فرض العدم، ونقبل الفرض البديل القائل بعد ثبات التباين، وبالتالي وجود مشكلة تباين حد الخطأ.

**تدريب (1):** موضحًا مفهوم مشكلة عدم ثبات التباين، عدِّد أسباب هذه المشكلة.

**5- طرق علاج مشكلة عدم ثبات التباين:**

من أبرز الطرق المستخدمة لتصحيح هذه المشكلة هي طريقة المربعات العامة Generalized least Squares، وتقوم فكرة هذه الطريقة على إعطاء القيم ذات الانحراف الأقل وزنًا أكبر من القيم ذات الانحراف الأكبر، والوزن الذي نأخذه هو مقلوب الانحراف المعياري للبواقي، وكلما قل تباين البواقي زاد الوزن، والعكس صحيح؛ ومن ثم إذا كان النموذج الأصلي هو: $Y_t = B_0 + B_1X_1t + B_2X_2t + u$

فإن النموذج المعدل الذي يتم تقديره لتلاشي مشكلة اختلاف التباين هو (الرشيد صفحة 205):

$$W_ty_t = B_0W_t + B_1W_tx_t + B_2W_tx_{2t} + W_tU_t$$

وبتقدير هذه الصيغة المعدلة نكون قد قضينا على مشكلة عدم ثبات التباين، ولكن تظل هنالك مشكلة، وهي كيف يمكن تقدير الوزن الذي يتم اختياره، ويمكن افتراض شكل مسبق لتباين المتغير العشوائي على أساس تخمين أو على أساس إحصائي.

فكثيرًا ما يفترض أن تباين الأخطاء العشوائية على علاقة مع تربيع المتغير التفسيري أو على علاقة مع المتغير التفسيري، والتحويل المناسب في هذه الحالة هو أن نقسم متغيرات النموذج جميعها بما فيها القاطع على قيم $X$ أو $x2$ على التوالي، وبعد تقدير النماذج الأصلية بإعادة التحويل المعاكس (بالضرب في $X$ أو $x2$)، وتحويل آخر شائع هو التحويل اللوغاريتمي للمتغير، حيث يتوقع أن يقلل من حدة المشكلة من خلال تقليل حجم وحدات قياس متغيرات النموذج.

ولكن تظل جميع هذه التحويلات تخمينية في أحسن الأحوال، بالإضافة لذلك فإن وجود أكثر من متغير تفسيري يجعل عملية التحويل أكثر غموضًا لعدم تأكدنا حول أي من هذه المتغيرات المستقلة يمثل بشكل أفضل أنماط تغير تباين الخطأ العشوائي، بالإضافة إلى ذلك فقد يرافق بعض هذه التحويلات ما يعرف في الاقتصاد القياسي بمشكلة الارتباط الظاهري وتشير هذه الظاهرة إلى حالة وجود ارتباط بين نسب المتغيرات، بالرغم من عدم جودها بين مستويات المتغيرات نفسها.