2. توزيعات المعاينة

توزيعات المعاينة هي: التوزيع الاحتمالي لإحصاءات العينة الذي يمكن الحصول عليه من خلال دراسة العلاقة بين إحصاءة العينة ومعالم المجتمع عن طريق سحب عينة عشوائية حجمها n وتكرار العملية للحصول على جميع العينات الممكنة.

1.2. توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\overline{\mathrm{X}}$

1.1.2. متوسط وتباين العينة

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية متطابقة التوزيع، أي لكل منها متوسط μ وتباين σ^2 فإن متوسط العينة وتباينها يعرفان بالعلاقة التالية:

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} x_{\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{S}^2 = \frac{1}{\mathrm{n}-1}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (x_{\mathrm{i}} - \overline{\mathrm{X}})^2$$

حيث : n حجم العينة

أما المتوسط الحسابي للمجتمع وتباينه فيعرفان كما يلي:

$$\mu = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} x_{\mathrm{i}}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} (x_{\mathrm{i}} - \mu)^2$$

حيث: N حجم المجتمع

2.1.2. متوسط وتباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{X}$

إن المتوسط الحسابي للمجتمع μ هو مقدار ثابت، أما المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ فتختلف قيمته من عينة لأخرى، فهو بذلك متغير عشوائي له توزيع احتمالي يسمى توزيع المعاينة الذي نتحصل عليه بدراسة العينات الممكنة التي لها نفس الحجم في المجتمع المدروس، ونميز بين حالتين:

حالة العينة المستقلة (السحب بإرجاع)

في حالة السحب بإرجاع فإن حجم المجتمع N لا يتغير عند سحب مفردة من مفرداته، ومن ثم تكون المشاهدات مستقلة عن بعضها البعض، ويتحقق هذا الاستقلال الإحصائي عندما يكون حجم المجتمع N كبيرا مقارنة بحجم العينة n، وتكون بذلك النسبة بينهما أقل من 0.05.

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

العينة غير المستقلة (السحب بدون إرجاع)

في حالة السحب بدون إرجاع فإن سحب مفردة من المجتمع لتكوين العينة يؤثر على سحب أي مفردة أخرى، فيتحقق عدم الاستقلال الإحصائي، ويتحدد المتوسط الحسابي وتباين المتوسط الحسابي العيني كما يلي:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

حيث:

$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$: معامل الإرجاع الذي يمكن إهماله إذا كان حجم العينة صغيرا جدا مقارنة بحجم المجتمع ($\frac{n}{N} < 0.05$).

أمثلة:

المثال الأول:	المثال الثاني:
أحسب المتوسط الحسابي وتباين المتوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ إذا علمت أن العينة العشوائية التي حجمها $n = 10$ أختيرت من مجتمع لا نهائي متوسطه الحسابي 70 وتباينه 50.	أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع معاينة $\overline{X}$ إذا اختيرت عينة حجمها $n = 500$ مفردة من مجتمع حجمه $N = 600$ مفردة، ومتوسطه الحسابي وانحرافه المعياري هما 26 و 3 على الترتيب.
الحل: بما أن السحب تم من مجتمع لا نهائي فهذا يعني تحقق الاستقلال الإحصائي، وعليه يمكن حساب المتوسط الحسابي وتباين المتوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ بالاعتماد على النظرية السابقة كما يلي: $E(\overline{X}) = \mu = 70$ $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = 5$	**الحل:** $\frac{n}{N} = \frac{500}{600} = 0.073 \geq 0.05$ ومنه نستنتج عدم تحقيق الاستقلال الإحصائي، ومن ثم فإن المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة $\overline{X}$ يحسبان كما يلي: $E(\overline{X}) = \mu = 26$ $V(\overline{X}) = \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ $= \frac{9}{500}\left(\frac{600-500}{600-1}\right) = 0.127$

ملاحظة:

يمكن تعميم النظرية السابقة على عينتين من مجتمعين مستقلين بناء على النظرية التالية:

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ عينة من توزيع متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، وأخذت عينة أخرى $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ من توزيع أخر مستقل عن الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 فإن:

$$E(\bar{X} - \bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2$$
$$V(\bar{X} - \bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

مثال	حل المثال
إذا تم اختيار عينة حجمها $n_1 = 30$ من توزيع متوسطه $\mu_1 = 60$ وتباينه $\sigma_1^2 = 15$ ، وعينة أخرى حجمها $n_2 = 60$ من توزيع أخر مستقل عن الأول متوسطه $\mu_2 = 75$ وتباينه $\sigma_2^2 = 25$. المطلوب: حساب $E(\bar{X} - \bar{Y})$ و $V(\bar{X} - \bar{Y})$	$E(\bar{X} - \bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2 = 60 - 75 = -15$ $V(\bar{X} - \bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{25}{60} + \frac{15}{30} = 0.91$

3.1.2. شكل توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{X}$

يمكن التمييز بين حالتين:

- **توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{X}$ عند المعاينة من مجتمع طبيعي:**

نميز فيها بين حالتين:

المعاينة من مجتمع طبيعي تباينه معلوم

حالة السحب بارجاع

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 فإن المتغير العشوائي $\overline{X}$ يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ وتباينه $\frac{\sigma^2}{n}$.

$$\overline{X} \backsim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

ونكتب:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

وإذا كانت قيمة $n \geq 30$ فإن التقريب يكون جيدا

حالة السحب بدون ارجاع

يكون توزيع متوسط العينة كما يلي:

$$\overline{X} \backsim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$$

ونكتب:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}} \backsim N(0,1)$$

المعاينة من مجتمع طبيعي تباينه مجهول

من الناحية العملية غالبا ما يكون تباين مجتمع الدراسة مجهولا فيستبدل بتقديره غير المتحيز S^2، ويمكن التمييز بين حالتين لتحديد توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$:

حالة السحب بارجاع

حجم العينة $n \geq 30$

المتغير $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ يقترب توزيعه من التوزيع الطبيعي المعياري استنادا إلى نظرية النهاية المركزية:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

حجم العينة $n < 30$

المتغير $T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ يتبع توزيع ستودنت:

$$T = \frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

حالة السحب بدون ارجاع $(n \geq 30)$

يكون توزيع متوسط العينة كما يلي:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{S^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$$

ونكتب:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$$

أمثلة:

المثال الأول	**المثال الثاني**
إذا كان الدخل الأسبوعي لعمال إحدى الشركات يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 1200 وحدة نقدية وانحراف معياري قدره 100 وحدة نقدية، ما هو احتمال أن يكون متوسط دخل عينة حجمها $n = 64$ أكبر من 1180 وحدة نقدية في الأسبوع؟	إذا علمت أن نقاط الطلبة في مادة الإحصاء تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 11 نقطة، تم اختيار عينة حجمها 36 طالبا من هذا المجتمع فوجد أن انحرافها المعياري هو 3 نقاط. المطلوب: حساب $P(\bar{X} > 13)$
الحل: ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل الدخل الأسبوعي للعمال. $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(1200, 100^2)$ $\bar{\mathrm{X}} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ومنه: $\mathrm{Z} = \frac{\bar{\mathrm{X}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب: $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{X}} > 1180) = \mathrm{P}\left(\frac{\bar{\mathrm{X}} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{1180 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$ $= \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} > \frac{1180 - 1200}{100/\sqrt{64}}\right) \quad = 0.9452$	**الحل:** ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل نقاط الطلبة في مادة الاحصاء. $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(11, \sigma^2)$ لدينا σ مجهول و $n \geq 30$ ومنه: $\mathrm{Z} = \frac{\bar{\mathrm{X}} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب: $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{X}} > 13) = \mathrm{P}\left(\frac{\bar{\mathrm{X}} - \mu}{s/\sqrt{n}} > \frac{13 - \mu}{s/\sqrt{n}}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} > \frac{13 - 11}{3/\sqrt{36}}\right)$ $= \mathrm{P}(\mathrm{Z} > 4) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 4) = 1 - 0.99995$ $= 0.00005$

- **توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ عند المعاينة من مجتمع غير طبيعي:**

إذا كانت المتغيرات $X_1, X_2, \dots., X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة المتطابقة التوزيع بمتوسط μ وتباينه σ^2 فإنه بتطبيق نظرية النهاية المركزية يقترب توزيع المتغير العشوائي $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$ من التوزيع الطبيعي كلما اقتربت قيمة n من ∞.

الحل:	**المثال:**
نعلم أن: $$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$ وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب: $$P(\overline{X} > 8) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{8 - \mu}{s/\sqrt{n}}\right)$$ $$= P\left(Z > \frac{8-7}{3/\sqrt{36}}\right) = P(Z > 2)$$ $$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0$$	إذا سحبت عينة عشوائية حجمها 36 من مجتمع متوسطه 7 وتباينه 9 ما هو احتمال أن يفوق الوسط الحسابي للعينة 8؟

2.2. توزيع المعاينة للنسبة في العينة

إذا كان $n \geq 30$ فإن توزيع $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي الذي متوسطه p وتباينه $\frac{pq}{n}$، ونكتب:

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

ملاحظات:

حتى نتمكن من استخدام التقريب الطبيعي بشكل صحيح يجب أن يكون $np \geq 5$ و $nq \geq 5$ (حتى نتأكد من أن حجم العينة كبير بما فيه الكفاية)

في حالة السحب بدون إرجاع نضرب تباين العينة في معامل التصحيح وإذا كانت p مجهولة تستبدل بـ $\hat{p}$.

المثال	الحل
إذا علمت أن احتمال نجاح الطالب في أحد المواد هو 0.9، فإذا تم اختيار عينة حجمها 49 طالبا من الطلبة الذي يدرسون هذه المادة أوجد $P(\hat{p} \geq 0.8)$.	الصفة المدروسة هي نجاح الطالب. نعلم أن: $$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$ وعليه يكون الاحتمال المطلوب حسابه كما يلي: $$P(\hat{p} \geq 0.8) = P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \geq \frac{0.8-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) = P(Z \geq -2.33)$$ $$= 1 - P(Z < -2.33) = 0.9901$$