**تقطير المصفوفات ومصفوفة التباين –التباين المشترك (التغاير)**

1. **تعريف المصفوفات القابلة للتقطير**

A مصفوفة مربعة، نقول أن المصفوفة قابلة للتقطير إذا و فقط إذا وجدت مصفوفة مربعة قطرية D ومصفوفة قابلة للقلب حيث: (تسمى مصفوفة للانتقال (.

**مثال-1:** أدرس قابلية تقطير المصفوفة حيث:

**الحل:**

1. يمكن التحقق من أن المصفوفة قابلة للقلب، وأن: ،
2. نتحقق من أن المصفوفة: مربعة قطرية:

إذن المصفوفة قابلة للتقطير.

**مبرهنة:**  مصفوفة مربعة من الدرجة ، عندئذ القضايا التالية متكافئة:

1. المصفوفة قابلة للتقطير؛
2. رتبة تضاعف كل قيمة ذاتية= بعد الفضاء الشعاعي الذاتي المرفق بها؛
3. يوجد أساس للفضاء الشعاعي مشكل فقط من الأشعة الذاتية للمصفوفة.

**مثال-2:** تعطى المصفوفة حيث:

1. *أثبت أن المصفوفة قابلة للتقطير، علما أنها تقبل ثلاث قيم ذاتية ، ،*

أشعتها المرافقة هي على الترتيب: ، ،

**الحل:**

**............................................................................................**

1. **طريقة تقطير مصفوفة مربعة**

مصفوفة مربعة من الدرجة ، لتقطير المصفوفة لابد من اتباع الخطوات التالية:

**الخطوة -1**: نتحقق من قابلية تقطير المصفوفة .

**الخطوة -2**: نشكل مصفوفة التقطير التي تمثل أعمدتها الأشعة الذاتية لـ: .

**الخطوة-3**: نحسب المصفوفة القطرية .

**مثال-3:** تعطى المصفوفة حيث:

*هل قابلة للتقطير علما أنها تقبل قيمة ذاتية بسيطة، ، وقيمة ذاتييه مضاعفة ؟*

**الحل:**

**............................................................................................**

1. **تطبيقات تقطير المصفوفات المربعة**

مصفوفة مربعة من الدرجة ، وقابلة للتقطير. قيمها الذاتية: *.*

*عندئذ: إذا كان تقطير المصفوفة بالشكل: فإن: حيث : ، وإذا فإن:*

**مثال-4**:تعطىالمصفوفة حيث:

1. بين أن 2-، 1-هما قيمتان ذاتيتان للمصفوفة.
2. حدد الشعاعين الذاتيين للمصفوفة ثم بين أنها قابلة للتقطير.
3. أحسب المصفوفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

**الحل:**

**............................................................................................**

**مسألة:** إذا أعطيت لك المصفوفتان :

**الجزء الأول:** أحسب ما يلي: أ) ب) بالتراجع جـ) استنتج

**الجزء الثاني:** a، b حسابان ماليان بحيث في نهاية كل سنة10% من مبلغ الحساب a تحول) تودع إلى (الحساب b ، أما من الحساب b فتحول 40% للحساب a ، وبافتراض أن هذه التحويلات لا يوجد إيداع أو أي تحويل آخر على هذين الحسابين .

إذا كان في الفترة الابتدائية 9 مليون دج بالحساب a و10 مليون دج بالحساب b.

المطلوب: ما هو رصيد كل من الحسابين a و b بعد سنتين؟ بعد 10 سنوات؟

**الحل**:

1. حساب

لدينا: . إذن المصفوفة قابلة للقلب حيث:

إذن:

1. نبرهن بالتراجع أن المصفوفة

* من أجل : وهي صحيحة من أجل
* نفرض أن: ونبرهن أن

لدينا:

إذن بالفعل لدينا:

جـ) استنتج :

نعلم أن: وبالتالي فإن

**الجزء الثاني**:

يمكن التعبير عن رصيدي الحسابين بصيغة مصفوفاتية كما يلي:

* رصيدا الحسابين بعد سنتين هما على التوالي:

ومنه:

* رصيدا الحسابين بعد عشر سنوات هما على التوالي:
* ومنه:

**4-مصفوفة التغاير (التباين-التباين المشترك) Variance-Covariance Matrix**

**تعريف**: يتم تعريف هذه المصفوفة على النحو التالي:

لتكن مصفوفة ذات n سطر و p عمود و هي قيم ممركزة.

عندئذ بالتعريف، مصفوفة التباين-التباين المشترك هي المصفوفة: حيث:

حيث قيم ممركزة

**حالة المتغيرات الممركزة والمختصرة:**

نعلم أن: ، فإذا كان: و فإن:

ويصبح لدينا:

**حالة خاصة (من أجل p=2):**

نستبدل المتغيرات للتبسيط:

وبالتالي:

**ومنه:**

**تطبيق توضيحي**

مجتمع مكون من 4 أفراد (Individus) أين نهتم بدراسة 3 متغيرات إحصائية . هؤلاء الأفراد هم 4 عائلات من 5 أطفال يعيشون بأجرة واحدة. والمتغيرات الإحصائية الثلاثة معرفة بمئات الدنانير، وهي على التوالي:

: الأجرة المتحصل عليها في جنافي لهذه السنة؛

: النفقات المخصصة للاستهلاك خلال هذا الشهر؛

: النفقات المخصصة للتسلية خلال هذا الشهر.

أوجد مصفوفة التباين-التباين المشترك، علما أن القيم الخاصة بهذه المتغيرات محددة في الجدول التالي:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| نفقات التسلية | نفقات الاستهلاك | الأجرة |
| 1 | 10.7 | 35 | العائلة 1 |
| 0.5 | 2.5 | 08 | العائلة 2 |
| 1.5 | 3.8 | 12 | العائلة 3 |
| 5 | 7 | 25 | العائلة 4 |

1. أحسب مصفوفة التباين-التباين المشترك.
2. أحسب مصفوفة الارتباط، ثم علق عليها.

**الحل:**

1. حساب مصفوفة التباين-التباين المشترك.
2. حساب المتوسطات الحسابية للمتغيرات
3. حساب مصفوفة البيانات الممركزة:

وبالتالي فإن مصفوفة التباين-التباين المشترك تعطى بالصيغة التالية:

1. حساب مصفوفة الارتباط:

بعد حساب الانحرافات المعيارية للمتغيرات ، حيث:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Z | Y | X |
| 0.2908 | 0.9959 | 1 | X |  |
| 0.2075 | 1 | 0.9959 | Y |
| 1 | 0.2075 | 0.2908 | Z |

وبالتالي يمكن حساب القيم الممركزة المختصرة يصبح لدينا:

**مسألة:** نهتم في هنا بدراسة الارتباط بين نقاط 10 طلبة لثلاثة مواد: انجليزية، ورياضيات، ودراسة حالة.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Etude de cas** | **Maths** | **Anglais** | **etudiant** |
| 8  15  14  4  13  18  12  6  13  7 | 9  17  12  7  11  14  10  14  16  10 | 12  8  10  4  15  5  8  12  12  4 | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 |
| 11 | 12 | 9 | **Moyenne** |

1. أوجد المصفوفة للقيم الممركزة لــ: 10 طلبة لنقاط المواد الثلاث.
2. أحسب المصفوفة ، ماذا تمثل؟
3. استنتج معامل الارتباط بين كل مادتين,

**الحل**:

1. أيجاد المصفوفة للقيم الممركزة لــ: 10 طلبة لنقاط المواد الثلاث.
2. حساب المصفوفة ، ماذا تمثل؟

إذن:

بمعنى أن الأعداد الموجودة على القطر الرئيسي هي من الشكل:

أما الإعداد خارج القطر الرئيسي فهي من الشكل: ؛

وعليه، فإن مصفوفة التباين-التباين المشترك هي:

حيث:

معامل ارتباط مادة الإنجليزية والرياضيات هو:

ومعامل ارتباط مادة الرياضيات ودراسة الحالة هو:

ومعامل ارتباط مادة الإنجليزية ودراسة الحالة هو:

وعليه، فإن مصفوفة معاملات الارتباط هي: