**تقطير المصفوفات ومصفوفة التباين –التباين المشترك (التغاير)**

1. **تعريف المصفوفات القابلة للتقطير**

 A مصفوفة مربعة، نقول أن المصفوفة $A$ قابلة للتقطير إذا و فقط إذا وجدت مصفوفة مربعة قطرية D ومصفوفة قابلة للقلب $P$ حيث: $ D=P^{-1}AP$ (تسمى $P$ مصفوفة للانتقال (.

**مثال-1:** أدرس قابلية تقطير المصفوفة $A$ حيث: $A=\left(\begin{matrix}2&-3\\-1&4\end{matrix}\right)$

**الحل:**

1. يمكن التحقق من أن المصفوفة $P=\left(\begin{matrix}3&-1\\1&1\end{matrix}\right)$ قابلة للقلب، وأن: $P^{-1}=\frac{1}{4}\left(\begin{matrix}1&1\\-1&3\end{matrix}\right)$،
2. نتحقق من أن المصفوفة: $D=P^{-1}AP$ مربعة قطرية:

$$D=P^{-1}AP=\frac{1}{4}\left(\begin{matrix}1&1\\-1&3\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}2&-3\\-1&4\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3&-1\\1&1\end{matrix}\right)=\frac{1}{4}\left(\begin{matrix}1&1\\-1&3\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3&-5\\1&5\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1&0\\0&5\end{matrix}\right)$$

إذن المصفوفة قابلة للتقطير.

**مبرهنة:** $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$، عندئذ القضايا التالية متكافئة:

1. المصفوفة $A$ قابلة للتقطير؛
2. رتبة تضاعف كل قيمة ذاتية= بعد الفضاء الشعاعي الذاتي المرفق بها؛
3. يوجد أساس للفضاء الشعاعي $R^{n}$ مشكل فقط من الأشعة الذاتية للمصفوفة$A$.

**مثال-2:** تعطى المصفوفة $A$ حيث: $A=\left(\begin{matrix}1&-1&1\\2&4&-1\\2&2&1\end{matrix}\right)$

1. *أثبت أن المصفوفة* $A$ *قابلة للتقطير، علما أنها تقبل ثلاث قيم ذاتية* $λ\_{1}=1$*،* $λ\_{2}=2$*،* $λ\_{3}=3$

أشعتها المرافقة هي على الترتيب: $u\_{1}\left(\begin{matrix}-1\\1\\1\end{matrix}\right)$، $u\_{2}\left(\begin{matrix}-1\\1\\0\end{matrix}\right)$، $u\_{3}\left(\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}\right)$

**الحل:**

**............................................................................................**

1. **طريقة تقطير مصفوفة مربعة**

$A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$، لتقطير المصفوفة $A$ لابد من اتباع الخطوات التالية:

**الخطوة -1**: نتحقق من قابلية تقطير المصفوفة $A$.

**الخطوة -2**: نشكل مصفوفة التقطير $\left(الانتقال\right)$ $P$ التي تمثل أعمدتها الأشعة الذاتية لـ: $A$.

**الخطوة-3**: نحسب المصفوفة القطرية $D=P^{-1}AP$.

**مثال-3:** تعطى المصفوفة $A$ حيث: $A=\left(\begin{matrix}-4&3&1\\-1&0&1\\2&2&-1\end{matrix}\right)$

*هل* $A$ *قابلة للتقطير علما أنها تقبل قيمة ذاتية بسيطة،* $λ\_{1}=1$ *، وقيمة ذاتييه مضاعفة* $λ\_{2}=-3$*؟*

**الحل:**

**............................................................................................**

1. **تطبيقات تقطير المصفوفات المربعة**

 $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$، وقابلة للتقطير. قيمها الذاتية: $λ\_{1},λ\_{2}…, λ\_{p}$*.*

*عندئذ: إذا كان تقطير المصفوفة* $A$ *بالشكل:* $D=P^{-1}AP$ *فإن:* $∀n\in N^{\*}:A^{n}=PD^{n}P^{-1} $ *حيث :* $P=\left(\begin{matrix}v\_{1}&v\_{2}&\begin{matrix}v\_{3}&\cdots \end{matrix}\\\vdots &\vdots &\begin{matrix}\vdots &\vdots \end{matrix}\end{matrix}\right)$*، وإذا* $D=\left(\begin{matrix}λ\_{1}&0&\begin{matrix}\cdots &\cdots &0\end{matrix}\\0&λ\_{2}&\begin{matrix}\ddots &\ddots &\vdots \end{matrix}\\\begin{matrix}\vdots \\\vdots \\0\end{matrix}&\begin{matrix}\ddots \\\ddots \\\cdots \end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}λ\_{3}&\ddots &\vdots \end{matrix}\\\begin{matrix}\ddots &\ddots &0\end{matrix}\\\begin{matrix}\cdots &0&λ\_{p}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$ *فإن:* $D^{n}=\left(\begin{matrix}λ\_{1}^{n}&0&\begin{matrix}\cdots &\cdots &0\end{matrix}\\0&λ\_{1}^{n}&\begin{matrix}\ddots &\ddots &\vdots \end{matrix}\\\begin{matrix}\vdots \\\vdots \\0\end{matrix}&\begin{matrix}\ddots \\\ddots \\\cdots \end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}λ\_{1}^{n}&\ddots &\vdots \end{matrix}\\\begin{matrix}\ddots &\ddots &0\end{matrix}\\\begin{matrix}\cdots &0&λ\_{1}^{n}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

**مثال-4**:تعطىالمصفوفة $A$ حيث: $A=\left(\begin{matrix}-2&1\\0&-1\end{matrix}\right)$

1. بين أن 2-، 1-هما قيمتان ذاتيتان للمصفوفة$A$.
2. حدد الشعاعين الذاتيين للمصفوفة$A$ ثم بين أنها قابلة للتقطير.
3. أحسب المصفوفة $A^{n}$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

**الحل:**

**............................................................................................**

**مسألة:** إذا أعطيت لك المصفوفتان :$ B=\left(\begin{matrix}1&0\\0&0,5\end{matrix}\right);P=\left(\begin{matrix}0,8&-1\\0,2&1\end{matrix}\right) $

**الجزء الأول:** أحسب ما يلي: أ) $A=PBP^{-1}$ ب) $B^{n}/\left(n\in N\right)$ بالتراجع جـ) استنتج $A^{n}$

**الجزء الثاني:** a، b حسابان ماليان بحيث في نهاية كل سنة10% من مبلغ الحساب a تحول) تودع إلى (الحساب b ، أما من الحساب b فتحول 40% للحساب a ، وبافتراض أن هذه التحويلات لا يوجد إيداع أو أي تحويل آخر على هذين الحسابين .

إذا كان في الفترة الابتدائية 9 $\left(0\right)$مليون دج بالحساب a و10 مليون دج بالحساب b.

 المطلوب: ما هو رصيد كل من الحسابين a و b بعد سنتين؟ بعد 10 سنوات؟

**الحل**:

1. حساب $A=PBP^{-1}$

لدينا: $det\left(A\right)=\left|\begin{matrix}0,8&-1\\0,2&1\end{matrix}\right|=0,8+0,2=1$. إذن المصفوفة $P$ قابلة للقلب حيث:

$$P^{-1}=\frac{1}{1}\left(\begin{matrix}1&1\\-0.2&0.8\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1&1\\-0.2&0.8\end{matrix}\right)$$

إذن: $A=PBP^{-1}=\left(\begin{matrix}0,8&-1\\0,2&1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1&0\\0&0,5\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1&1\\-0.2&0.8\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0.9&0.4\\0.1&0.6\end{matrix}\right)$

1. نبرهن بالتراجع أن المصفوفة $B^{n}=\left(\begin{matrix}1^{n}&0\\0&\left(0,5\right)^{n}\end{matrix}\right)$
* من أجل $n=1$: $ B^{1}=\left(\begin{matrix}1^{1}&0\\0&\left(0,5\right)^{1}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1&0\\0&0,5\end{matrix}\right)=B $وهي صحيحة من أجل $n=1$
* نفرض أن: $B^{n}=\left(\begin{matrix}1^{n}&0\\0&\left(0,5\right)^{n}\end{matrix}\right)$ ونبرهن أن $B^{n+1}=\left(\begin{matrix}1^{n+1}&0\\0&\left(0,5\right)^{n+1}\end{matrix}\right)$

لدينا: $B^{n+1}=B\*B^{n}=\left(\begin{matrix}1&0\\0&0,5\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1^{n}&0\\0&\left(0,5\right)^{n}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1^{n+1}&0\\0&\left(0,5\right)^{n+1}\end{matrix}\right)$

إذن بالفعل لدينا: $∀n\in N: B^{n+1}=\left(\begin{matrix}1^{n+1}&0\\0&\left(0,5\right)^{n+1}\end{matrix}\right)$

جـ) استنتج $A^{n}$:

نعلم أن: $A=PBP^{-1}$ وبالتالي فإن

$$A^{n}=PB^{n}P^{-1}=\left(\begin{matrix}0,8&-1\\0,2&1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1^{n}&0\\0&\left(0,5\right)^{n}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1&1\\-0.2&0.8\end{matrix}\right)$$

$$A^{n}=\left(\begin{matrix}0,8&-\left(0.5\right)^{n}\\0,2&\left(0.5\right)^{n}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1&1\\-0.2&0.8\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0,8+0,2\left(0.5\right)^{n}&0,8-0,8\left(0.5\right)^{n}\\0,2-0,2\left(0.5\right)^{n}&0,2+0,8\left(0.5\right)^{n}\end{matrix}\right)$$

**الجزء الثاني**:

يمكن التعبير عن رصيدي الحسابين $b و a$ بصيغة مصفوفاتية كما يلي:

$$\left\{\begin{array}{c}a\_{n+1}=0.9a\_{n}+0,4b\_{n}\\b\_{n+1}=0,1a\_{n}+0,6b\_{n}\end{array}\right.⟺\left(\begin{matrix}a\_{n+1}\\b\_{n+1}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0,9&0,4\\0,1&0,6\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}a\_{n}\\b\_{n}\end{matrix}\right) …(I)$$

$$\left(I\right)⟺\left(\begin{matrix}a\_{n}\\b\_{n}\end{matrix}\right)=A^{n}\left(\begin{matrix}a\_{0}\\b\_{0}\end{matrix}\right); A=\left(\begin{matrix}0,9&0,4\\0,1&0,6\end{matrix}\right)$$

$$\left(I\right)⟺\left(\begin{matrix}a\_{n}\\b\_{n}\end{matrix}\right)=A^{n}\left(\begin{matrix}a\_{0}\\b\_{0}\end{matrix}\right); A=\left(\begin{matrix}0,9&0,4\\0,1&0,6\end{matrix}\right)$$

* رصيدا الحسابين $b و a$ بعد سنتين هما على التوالي:

$$\left(\begin{matrix}a\_{2}\\b\_{2}\end{matrix}\right)=A^{2}\left(\begin{matrix}a\_{0}\\b\_{0}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0,8+0,2\left(0.5\right)^{2}&0,8-0,8\left(0.5\right)^{2}\\0,2-0,2\left(0.5\right)^{2}&0,2+0,8\left(0.5\right)^{2}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}9\\10\end{matrix}\right)$$

ومنه: $\left\{\begin{array}{c}a\_{2}=6,85\\b\_{2}=4,15\end{array}\right.$

* رصيدا الحسابين $b و a$ بعد عشر سنوات هما على التوالي:
* $\left(\begin{matrix}a\_{10}\\b\_{10}\end{matrix}\right)=A^{10}\left(\begin{matrix}a\_{0}\\b\_{0}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0,8+0,2\left(0.5\right)^{10}&0,8-0,8\left(0.5\right)^{10}\\0,2-0,2\left(0.5\right)^{10}&0,2+0,8\left(0.5\right)^{10}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}9\\10\end{matrix}\right)$
* ومنه: $\left\{\begin{array}{c}a\_{10}=8,79\\b\_{10}=2,21\end{array}\right.$

**4-مصفوفة التغاير (التباين-التباين المشترك) Variance-Covariance Matrix**

**تعريف**: يتم تعريف هذه المصفوفة على النحو التالي:

لتكن $X$ مصفوفة ذات n سطر و p عمود و $X\_{ij}$ هي قيم ممركزة.

$$X=\begin{matrix}Variables\\\left(\begin{matrix}x\_{11}&x\_{12}&\begin{matrix}x\_{13}&\cdots &x\_{1p}\end{matrix}\\x\_{21}&x\_{22}&\begin{matrix}x\_{11}&\cdots &x\_{2p}\end{matrix}\\\begin{matrix}x\_{31}\\\vdots \\x\_{n1}\end{matrix}&\begin{matrix}x\_{32}\\\vdots \\x\_{n2}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}x\_{33}&\cdots &x\_{3p}\end{matrix}\\\begin{matrix}\vdots &\vdots &\vdots \end{matrix}\\\begin{matrix}x\_{n3}&\cdots \cdots &x\_{np}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\end{matrix}\downright Individus$$

عندئذ بالتعريف، مصفوفة التباين-التباين المشترك هي المصفوفة: $M=\frac{1}{n}X^{t}.X$حيث:

$$M=\frac{1}{n}X^{t}.X=\left(\begin{matrix}var\left(x\_{1}\right)&\cdots &\begin{matrix}\cdots &\cdots &cov\left(x\_{1},x\_{p}\right)\end{matrix}\\\vdots &\ddots &\begin{matrix}\ddots &\ddots &\vdots \end{matrix}\\\begin{matrix}\vdots \\\vdots \\cov\left(x\_{1},x\_{p}\right)\end{matrix}&\begin{matrix}\ddots \\\ddots \\\cdots \end{matrix}& \begin{matrix}\begin{matrix}var\left(x\_{j}\right) &\ddots &\vdots \end{matrix}\\\begin{matrix}\ddots & \ddots & \vdots \end{matrix}\\\begin{matrix}\cdots & \cdots & var\left(x\_{p}\right)\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix} \right)$$

حيث $X\_{ij}$ قيم ممركزة

**حالة المتغيرات الممركزة والمختصرة:**

نعلم أن: $r\_{x\_{1}x\_{2}}=\frac{cov\left(x\_{1},x\_{2}\right)}{σ\_{1}σ\_{2}}$ ، فإذا كان: $σ\_{i}=1$ و $σ\_{j}=1$ فإن: $cov\left(x\_{i},x\_{j}\right)=r\_{x\_{i}x\_{j}}$

ويصبح لدينا: $M=\frac{1}{n}X^{t}.X=\left(\begin{matrix}1&\cdots &\begin{matrix}\cdots &\cdots &r\_{x\_{1}x\_{p}}\end{matrix}\\\vdots &\ddots &\begin{matrix}\ddots &\ddots &\vdots \end{matrix}\\\begin{matrix}\vdots \\\vdots \\r\_{x\_{1}x\_{p}}\end{matrix}&\begin{matrix}\ddots \\\ddots \\\cdots \end{matrix}& \begin{matrix}\begin{matrix}1 &\ddots &\vdots \end{matrix}\\\begin{matrix}\ddots & \ddots & \vdots \end{matrix}\\\begin{matrix}\cdots & \cdots & 1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix} \right)$

**حالة خاصة (من أجل p=2):**

نستبدل المتغيرات للتبسيط: $X=\left(\begin{matrix}x\_{1}-\overbar{X}&y\_{1}-\overbar{Y}\\\begin{matrix}x\_{2}-\overbar{X}\\x\_{3}-\overbar{X}\\\begin{matrix}\vdots \\x\_{p}-\overbar{X}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}y\_{2}-\overbar{Y}\\y\_{3}-\overbar{Y}\\\begin{matrix}\vdots \\y\_{p}-\overbar{Y}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

وبالتالي: $\frac{1}{n}X^{t}.X=\frac{1}{n}\left(\begin{matrix}x\_{1}-\overbar{X}&x\_{2}-\overbar{X}&\begin{matrix}x\_{3}-\overbar{X}&\cdots &x\_{n}-\overbar{X}\end{matrix}\\y\_{1}-\overbar{Y}&y\_{2}-\overbar{Y}&\begin{matrix}y\_{3}-\overbar{Y}&\cdots &y\_{n}-\overbar{Y}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}x\_{1}-\overbar{X}&y\_{1}-\overbar{Y}\\\begin{matrix}x\_{2}-\overbar{X}\\x\_{3}-\overbar{X}\\\begin{matrix}\vdots \\x\_{p}-\overbar{X}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}y\_{2}-\overbar{Y}\\y\_{3}-\overbar{Y}\\\begin{matrix}\vdots \\y\_{p}-\overbar{Y}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

**ومنه:**

$$\frac{1}{n}\left(X\right)^{t}\left(X\right)=\frac{1}{n}\left(\begin{matrix}\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-\overbar{X}\right)^{2}&\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-\overbar{X}\right)\left(y\_{i}-\overbar{Y}\right)\\\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-\overbar{X}\right)\left(y\_{i}-\overbar{Y}\right)&\sum\_{i=1}^{n}\left(y\_{i}-\overbar{Y}\right)^{2}\end{matrix}\right)$$

**تطبيق توضيحي**

مجتمع مكون من 4 أفراد (Individus) أين نهتم بدراسة 3 متغيرات إحصائية $x, y, z$. هؤلاء الأفراد هم 4 عائلات من 5 أطفال يعيشون بأجرة واحدة. والمتغيرات الإحصائية الثلاثة معرفة بمئات الدنانير، وهي على التوالي:

$x$: الأجرة المتحصل عليها في جنافي لهذه السنة؛

 $y $: النفقات المخصصة للاستهلاك خلال هذا الشهر؛

$z$ : النفقات المخصصة للتسلية خلال هذا الشهر.

أوجد مصفوفة التباين-التباين المشترك، علما أن القيم الخاصة بهذه المتغيرات محددة في الجدول التالي:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| نفقات التسلية $z$ | نفقات الاستهلاك $y $ | الأجرة $x$ |
| 1 | 10.7 | 35 | العائلة 1 |
| 0.5 | 2.5 | 08 | العائلة 2 |
| 1.5 | 3.8 | 12 | العائلة 3 |
| 5 | 7 | 25 | العائلة 4 |

1. أحسب مصفوفة التباين-التباين المشترك.
2. أحسب مصفوفة الارتباط، ثم علق عليها.

**الحل:**

1. حساب مصفوفة التباين-التباين المشترك.
2. حساب المتوسطات الحسابية للمتغيرات

$$\overbar{Z}=\frac{1+0.5+1.5+5}{4}=2 و \overbar{Y}=\frac{7+3.5+10.7+2.5}{4}=6و \overbar{X}=\frac{35+8+12+25}{4}=20$$

1. حساب مصفوفة البيانات الممركزة: $X=\left(\begin{matrix}15&4.7&-1\\-12&-3.5&-1.5\\\begin{matrix}-8\\5\end{matrix}&\begin{matrix}-2.2\\1\end{matrix}&\begin{matrix}-0.5\\3\end{matrix}\end{matrix}\right)$

وبالتالي فإن مصفوفة التباين-التباين المشترك تعطى بالصيغة التالية: $\frac{1}{n}X^{t}.X$

$$\frac{1}{n}X^{t}.X=\frac{1}{4}\left(\begin{matrix}15&-12&\begin{matrix}-8&5\end{matrix}\\4.7&-3.5&\begin{matrix}-2.2&1\end{matrix}\\-1&-1.5&\begin{matrix}-0/5&3\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}15&4.7&-1\\-12&-3.5&-1.5\\\begin{matrix}-8\\5\end{matrix}&\begin{matrix}-2.2\\1\end{matrix}&\begin{matrix}-0.5\\3\end{matrix}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}114.5&12.775&-3.5\\12.775&10.075&1.1625\\-3.5&1.1625&3.125\end{matrix}\right)$$

1. حساب مصفوفة الارتباط:

بعد حساب الانحرافات المعيارية للمتغيرات $x, y, z$، حيث:

$$σ\_{X}=\sqrt{114.5}=10.7005; σ\_{Y}=\sqrt{10.075}=3.1741; σ\_{Z}=\sqrt{3.125}=1.7678$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Z | Y | X |
| 0.2908 | 0.9959 | 1 | X | $$\frac{1}{n}X^{t}.X=$$ |
| 0.2075 | 1 | 0.9959 | Y |
| 1 | 0.2075 | 0.2908 | Z |

وبالتالي يمكن حساب القيم الممركزة المختصرة يصبح لدينا:

**مسألة:** نهتم في هنا بدراسة الارتباط بين نقاط 10 طلبة لثلاثة مواد: انجليزية، ورياضيات، ودراسة حالة.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Etude de cas** | **Maths** | **Anglais** | $N^{°}$**etudiant** |
| 8151441318126137 | 917127111410141610 | 128104155812124 | 12345678910 |
| 11 | 12 | 9 | **Moyenne** |

1. أوجد المصفوفة $A$ للقيم الممركزة لــ: 10 طلبة لنقاط المواد الثلاث.
2. أحسب المصفوفة $V=A^{t}\*A$، ماذا تمثل؟
3. استنتج معامل الارتباط بين كل مادتين,

**الحل**:

1. أيجاد المصفوفة $A$ للقيم الممركزة لــ: 10 طلبة لنقاط المواد الثلاث.

$$A=X-\overbar{X}=\begin{matrix}\begin{matrix}\left(X\_{1}\right)A&\left(X\_{2}\right)M&\left(X\_{3}\right)EC\end{matrix}\\\left(\begin{matrix}3&-3&-3\\-1&5&4\\\begin{matrix}1\\-5\\\begin{matrix}6\\-4\\\begin{matrix}-1\\3\\\begin{matrix}3\\-5\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}0\\-5\\\begin{matrix}-1\\2\\\begin{matrix}-2\\2\\\begin{matrix}4\\-2\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}3\\-7\\\begin{matrix}2\\7\\\begin{matrix}1\\-5\\\begin{matrix}2\\-4\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\end{matrix} $$

1. حساب المصفوفة $V=A^{t}\*A$، ماذا تمثل؟

$$A^{t}∙A=\left(\begin{matrix}3&-1&\begin{matrix}1&-5&\begin{matrix}6&-4&\begin{matrix}-1&\begin{matrix}3&3&-5\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\-3&5&\begin{matrix}0&-5&\begin{matrix}-1&2&\begin{matrix}-2&\begin{matrix}2&4&-2\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\-3&4&\begin{matrix}3&-7&\begin{matrix}2&7&\begin{matrix}1&\begin{matrix}-5&2&-4\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)∙\begin{matrix}\\\left(\begin{matrix}3&-3&-3\\-1&5&4\\\begin{matrix}1\\-5\\\begin{matrix}6\\-4\\\begin{matrix}-1\\3\\\begin{matrix}3\\-5\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}0\\-5\\\begin{matrix}-1\\2\\\begin{matrix}-2\\2\\\begin{matrix}4\\-2\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}3\\-7\\\begin{matrix}2\\7\\\begin{matrix}1\\-5\\\begin{matrix}2\\-4\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\end{matrix}$$

إذن: $A^{t}∙A=\left(\begin{matrix}132&27&19\\27&92&80\\19&80&182\end{matrix}\right)$

بمعنى أن الأعداد الموجودة على القطر الرئيسي هي من الشكل: $\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-\overbar{X}\right)^{2}$

أما الإعداد خارج القطر الرئيسي فهي من الشكل: $\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-\overbar{X}\right)\left(y\_{i}-\overbar{Y}\right)$؛

وعليه، فإن مصفوفة التباين-التباين المشترك هي:

$$\frac{1}{10}A^{t}∙A=\left(\begin{matrix}vra\left(x\_{1}\right)&cov\left(x\_{1},x\_{2}\right)&cov\left(x\_{1},x\_{3}\right)\\cov\left(x\_{1},x\_{2}\right)&vra\left(x\_{2}\right)&cov\left(x\_{2},x\_{3}\right)\\cov\left(x\_{1},x\_{3}\right)&cov\left(x\_{2},x\_{3}\right)&vra\left(x\_{3}\right)\end{matrix}\right)$$

حيث:

معامل ارتباط مادة الإنجليزية والرياضيات هو: $r\_{x\_{1}x\_{2}}=r\_{AM}=\frac{27}{\sqrt{132}\sqrt{92}}=0.245$

ومعامل ارتباط مادة الرياضيات ودراسة الحالة هو: $r\_{x\_{2}x\_{3}}=r\_{M∙EC}=\frac{80}{\sqrt{92}\sqrt{182}}=0.618$

ومعامل ارتباط مادة الإنجليزية ودراسة الحالة هو: $r\_{x\_{1}x\_{3}}=r\_{A∙EC}=\frac{19}{\sqrt{132}\sqrt{282}}=0.123$

وعليه، فإن مصفوفة معاملات الارتباط هي: $\frac{1}{10}A^{t}∙A=\left(\begin{matrix}1&0.245&0.123\\0.245&1&0.618\\0.123&0.618&1\end{matrix}\right)$