

Chapitre 5

Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes directes

5.1 Introduction :

La résolution des systèmes d'équations linéaires modélisent la majorité des phénomènes physiques tels que :

- Tension dans une structure
- Flot dans un réseau hydraulique
- Mélange de produits chimiques
- Vibration d'un système mécanique
- Élasticité
- Potentiel dans un circuit électrique
- Transfert de chaleur
- Réduction d'équations différentielles.

5.2 Généralités sur les matrices :

5.2.1 Définition:

Une matrice d'éléments de \mathbb{R} est un tableau à deux dimensions composé de m lignes et n colonnes. L'ensemble des matrices de \mathbb{R} de dimension m, n est noté $M_{m,n}$ et forme un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

5.2.2 Propriétés :

Soient A et B deux matrices :

- $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m,n} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$
- $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m,n}$
- On appelle transposé de A la matrice A^t telle que :

$$[A^t]_{ij} = a_{ji} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

- Soient $A \in M_{m,n}$ et $B \in M_{n,p}$ alors le produit $C \in M_{m,p}$ est donné par la formule suivante. $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq p$

- $AB \neq BA$

- $A(BC) = (AB)C = ABC$

- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

- On dit qu'une matrice $A \in M_{n,n}$ est inversible si et seulement si

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Une matrice A est dite symétrique si $A^t = A$ (autrement dit si $a_{ij} = a_{ji}$) et antisymétrique si $A^t = -A$

- On dit que A est orthogonale si : $A^{-1} = A^t$

- Une matrice A est dite triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $j > i$

- Une matrice B est dite triangulaire supérieure si $b_{ij} = 0$ pour $i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

5.3 Systèmes d'équations:

On appelle système de m équations à n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n , la famille d'équations.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Que l'on peut mettre sous la forme $Ax = b$

Où: $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ est une matrice donnée par ses éléments (a_{ij})

$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ et x le vecteur inconnu de composantes (x_1, x_2, \dots, x_n)

On va étudier dans ce chapitre les systèmes d'équations linéaires dont le nombre d'équations est égal à ceux d'inconnues et dont le déterminant est non nul. Un système d'équations linéaire de n équations avec n inconnues s'écrit alors :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \dots\dots\dots(5.1)$$

Ce système peut s'écrit sous la forme $Ax = b$ ou sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

5.4 Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes directes :

- Les méthodes directes : celles où on obtient la valeur exacte de la solution après un nombre fini d'opérations,
- Les méthodes itératives (indirectes) : elles consistent à construire une suite de vecteurs x^k convergeant vers la solution x cherchée. On s'arrête bien sûr au bout d'un nombre fini n d'itérations choisi pour que x^n soit suffisamment voisin de x .

5.4.1 Méthode de Gauss :

La méthode de gauss consiste à transformer le système $Ax = b$ à un système triangulaire supérieur équivalent à l'aide d'un algorithme dite algorithme d'élimination.

On va appliquer les opérations suivantes pour obtenir un système triangulaire :

- Une équation peut être remplacée par cette même équation à la quelle en ajoute ou on retranche un certains nombre de fois une autre ligne.
- La multiplication d'une équation par un constant non nulle.
- La permutation de deux lignes ou deux colonnes.

5.4.1.1 Résolution d'un système triangulaire supérieur :

Si le système $Ax = b$ est triangulaire supérieure, il a la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

5.4.1.2 Théorème (unicité de la solution):

Soit le système triangulaire supérieur $Ax = b$ où $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ est une matrice carrée et $b \in \mathbb{R}^n$, si $a_{kk} \neq 0 \forall k \in [1, n]$.

Alors le système $Ax = b$ admet une solution unique x donnée par

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right] \quad i = \overline{n, 1}$$

Si la matrice A est triangulaire inférieure le système $AX = b$ s'écrit comme suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i a_{ij}x_j &= b_i & i &= \overline{1, n} \\ a_{ij} &= 0 & \text{si } j &> i \end{aligned}$$

Alors :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \right] \quad i = \overline{1, n}$$

5.4.1.3 Etapes de la méthode de Gauss

Principe : transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure.

Dans le système (5.1) on regroupe A et b dans une seule matrice $[A: b]$.

et $[A: b] \xrightarrow{\text{transformation}} [A^{(n)}: b^{(n)}]$ Ou $A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure équivalente à A .

où $A^{(1)}x = b^{(1)} \dots \dots \dots (2)$

Avec : $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = A$, $b^{(1)} = b_j^{(1)} = b$

$$\text{cest - à - dire: } [A: b] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \cdot b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \cdot b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & \dots & a_{nn}^{(1)} \cdot b_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \dots \\ \dots \\ L_n^{(1)} \end{matrix}$$

Après l'élimination de Gauss on obtient la matrice

$$[A^{(n)}: b^{(n)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(n)} \cdot b_1^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(n)} \cdot b_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(1)} \cdot b_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(n)} \\ L_2^{(n)} \\ \dots \\ \dots \\ L_n^{(n)} \end{matrix}$$

Avec $L_i^{(j)}$ représente la ligne i à l'étape j .

Enfin on résout le système $A^{(n)}x = b^{(n)}$ dont x est la solution exacte du système

$Ax = b$.

On procède de la manière suivante :

Etape1 : On pose $A = A^{(1)}$ et $b = b^{(1)}$

Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ on fait les opérations suivantes :

$$L_1 \text{ est maintenue} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$[A^{(2)}: b^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccccc} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(2)} \cdot b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \cdot b_2^{(2)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{nn}^{(2)} \cdot b_n^{(2)} \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ \dots \\ \dots \\ L_n^{(2)} \end{array}$$

Et ainsi de suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_k^{(k+1)} = L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \end{array} \right.$$

Résolution de $A^{(n)}x = b^{(n)}$

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{(n)}x = b^{(n)} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}^{(n)}x_1 + a_{12}^{(n)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(n)}x_n = b_1^n \\ \dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^n \end{cases}$$

On commence par déterminer x_n puis $x_{n-1} \dots$ (résolution par retour en arrière).

Exemple :

Trouver la solution du système suivant par la méthode de gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{array} \right]$$

L'étape 1 : élimination de x_1

$$L_2^{(2)} \rightarrow L_2^{(1)} - 2L_1^{(1)}$$

$$L_3^{(2)} \rightarrow L_3^{(1)} - 3L_1^{(1)}$$

$$A^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & +3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{array} \right]$$

L'étape 2 : élimination de x_2 :

$$L_3^{(3)} \rightarrow L_3^{(2)} - \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} L_2^{(2)}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & +3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \vdots & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

On remplace inversement on obtient

$$\frac{15}{2} x_3 = \frac{15}{2} \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-4 x_2 - 6x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.4.2 Méthode de Cholesky :

Pour résoudre un système d'équation linéaire $A x = b$ il faut que la matrice A soit symétrique définie positive.

5.3.1. Définition :

Une matrice est dite définie positive si et seulement si pour tout

$$x \in \mathbb{R}^n \neq 0 : x^t A x > 0$$

Condition suffisante pour que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ & & \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

A est définie positive si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs

($\det A_{(k)}_{1 \leq k \leq n} > 0$) c'est à dire :

$$a_{11} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

.

.

.

$$\det A > 0$$

5.3.2 Décomposition de la matrice A :

Une matrice A symétrique, définie positive si et seulement s'il existe une matrice L triangulaire inférieure inversible telle que $A = L L^t$

5.3.3 Algorithme :

Soit A une matrice symétrique, définie positive pour résoudre le système $Ax = b$ il faut résoudre :

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

Construire la matrice $L = (l_{ij})$ triangulaire inférieure telle que

$$A = L L^t \text{ où } A = (a_{ij}) \text{ et } a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{jk} \quad j \leq i$$

$$\text{Donc : } a_{11} = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$\text{et } a_{i1} = l_{i1} l_{11} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}} \quad i = 2, n$$

La construction de la matrice L se fait colonne par colonne

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$\text{Et : } a_{ih} = \sum_{j=1}^h l_{ij} l_{hj} = l_{ih} l_{hh} + \sum_{j=1}^{h-1} l_{ij} l_{hj}$$

$$\text{Donc : } l_{ih} = (a_{ih} - \sum_{j=1}^{h-1} l_{ij} l_{hj}) / l_{hh}$$

Exemple 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x^t A x = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 8x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad x = 0$$

Alors A est définie positive.

Exemple 2 :

$$\text{Soit la matrice } A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 15 & 7 & 42 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et le vecteur } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Condition de convergence (méthode de Colesky) \Rightarrow A symétrique définie positive.

- A est symétrique
- Est-ce- que A est définie positive

$$\Delta_1 = 9 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 9 = 36 > 0$$

Δ_3

$$\begin{aligned}
 = \det A &= 9 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 42 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 15 & 42 \end{vmatrix} + 15 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 7 \end{vmatrix} = 9(161) - 3(21) + 15(54) \\
 &= 1449 - 63 - 810 = 576 > 0
 \end{aligned}$$

Alors A est symétrique définie positive.

Décomposition de A :

$$\begin{aligned}
 A = L L^t &= \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \ell_{11}^2 & \ell_{11}\ell_{21} & \ell_{11}\ell_{31} \\ \ell_{21}\ell_{11} & \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 & \ell_{21}\ell_{31} + \ell_{22}\ell_{32} \\ \ell_{31}\ell_{11} & \ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} & \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La 1^{ère} colonne :

$$\ell_{11}^2 = 9 \Rightarrow \ell_{11} = 3$$

$$\ell_{21}\ell_{11} = 3 \Rightarrow \ell_{21} = 1$$

$$\ell_{31}\ell_{11} = 15 \Rightarrow \ell_{31} = 5$$

La 2^{ème} colonne :

$$\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = 5 \Rightarrow \ell_{22} = 2$$

$$\ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} = 7 \Rightarrow \ell_{32} = 1$$

La 3^{ème} colonne :

$$\ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = 42 \quad \ell_{33} = 4$$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

$$L^t x = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Enfin $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Remarque :

On a $A_{\ell} = L_{\ell} L_{\ell}^t$ où L_{ℓ} sont les matrices composées des ℓ premières lignes et ℓ premières colonnes de A et de L

$\det A_{\ell} = (l_{11} \cdot l_{22} \cdot l_{33} \dots \dots \dots l_{\ell\ell})^2 = l_{11}^2 \cdot l_{22}^2 \cdot l_{33}^2 \dots \dots \dots l_{\ell\ell}^2 > 0$ est symétrique définie positive).

- La méthode de Colesky permet de calculer $\det A$ par : $\det A = \prod_{i=1}^n \rho_{ii}^2$.

5.4.3 Méthode de Crout-Dolittle ou LU

Cette méthode consiste à factoriser la matrice A pleine en deux matrices triangulaires L et U, tel que L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont égaux à l'unité ($u_{ii} = 1$).

On a donc $A x = b$ et $A=LU$ donc $LU x = b$, on pose $U x = y$ (y vecteur inconnu), cela donne :

$$\begin{cases} Ly = B \\ Ux = y \end{cases}$$

Le système $Ax=b$ est décomposé en deux systèmes triangulaires faciles à résoudre. Le système à matrice triangulaire supérieure est résolu par substitution directe, celui à matrice triangulaire inférieure par substitution inverse.

5.4.3.1 Détermination des matrices L et U

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments de chaque matrice sont donnés par :

$$l_{ki} = a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj} u_{ji}$$

Avec : $i=2,3,\dots,n$ et $k=i,i+1,\dots,n$

$$u_{ik} = \frac{(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk})}{l_{ii}}$$

Exemple :

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

On applique l'algorithme de Crout et Doolittle pour résoudre le système $AX=b$.

$$\text{On cherche } L = \begin{bmatrix} l_{12} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tel que } A=LU$$

-On identifie la première colonne de A et la première colonne de LU, cela permet d'obtenir la première colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ -2 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- On compare la première ligne de A avec la première ligne de LU, cela permet d'obtenir la première ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ -2 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- On compare la deuxième colonne de A avec la deuxième colonne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- On compare la deuxième ligne de A avec la deuxième ligne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- On compare la troisième colonne de A avec la troisième colonne de LU, cela permet d'obtenir la troisième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Puis on remplace dans

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = Y \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$