

Rappels sur le calcul des probabilités et la statistique

Introduction

« La théorie des probabilités et la statistique sont des outils essentiels pour formaliser les hypothèses et gérer les incertitudes liées aux données. Elles permettent de modéliser des phénomènes aléatoires et de tirer des conclusions à partir d'observations. »

Théorie des probabilités vs. Statistique

Théorie des probabilités :

- Permet de modéliser des phénomènes aléatoires et d'effectuer des calculs théoriques.
- S'applique aux **populations théoriques** et non aux observations directes.
- Ne repose pas sur des mesures expérimentales mais sur des modèles mathématiques.

Statistique :

- Concerne les **échantillons**, c'est-à-dire des données issues du monde réel.
- S'appuie sur des **mesures et observations** effectuées sur des individus.
- Repose sur la **modélisation probabiliste** pour analyser et interpréter les données observées.

Statistique

- Elle s'intéresse aux données réelles observées (échantillons) et permet de généraliser les résultats à une population tout en tenant compte des incertitudes.

Exemple Estimer la durée moyenne de vie d'une ampoule en testant un échantillon de 100 ampoules.

- **1---Statistique descriptive**

Résume et représente les données (moyenne, variance, histogrammes).

- **2---Statistique inférentielle**

Généralise les propriétés d'un échantillon à une population en tenant compte des fluctuations d'échantillonnage.

Exemple Estimation de la durée moyenne de vie des ampoules à partir d'un échantillon.

Une probabilité

- **Une probabilité** P est une fonction qui associe à chaque événement A une valeur $P(A)$ entre 0 et 1, avec :
 - $P(\Omega) = 1$ (événement certain).
 - $P(\emptyset) = 0$ (événement impossible).
 - Si A et B sont disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- **Règles de calcul**
 - Union : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
 - Complémentaire : $P(\neg A) = 1 - P(A)$.

- **Expérience aléatoire** Une expérience dont le résultat ne peut pas être prédit avec certitude, mais qui peut être répétée dans des conditions identiques.

Exemple : Lancer une pièce de monnaie.

- **Univers (Ω)** Ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience

Exemple : Pour un lancer de dé, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- **Événement** Un sous-ensemble de Ω .

Exemple : Obtenir un nombre pair : $A = \{2, 4, 6\}$.

- **Espace d'événements ($\mathcal{S}$) :**

- Contient tous les événements possibles.
- Est fermé sous les opérations d'union et de complément.
- -Contient l'ensemble vide $\emptyset$ et l'événement certain Ω .



Variables aléatoires

- Les données sont traitées comme des variables aléatoires, dont la valeur est incertaine avant observation. La loi de probabilité d'une variable aléatoire caractérise l'incertitude liée à sa valeur.
- **VA discrète** Prend des valeurs dénombrables (ex : nombre de faces obtenues en 10 lancers de pièce).
- **VA continue** Prend des valeurs dans un intervalle réel (ex : taille d'une personne).

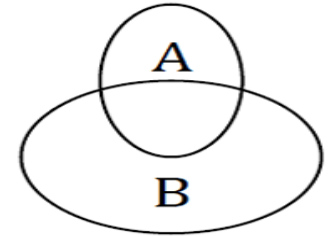
Distribution	Type	Paramètres	Fonction de masse/densité	Espérance $E(X)$	Variance $V(X)$	Exemples d'application
Bernoulli	Discrète	p	$P(X = 1) = p,$ $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$	Succès/échec (ex : pile ou face)
Binomiale	Discrète	n, p	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$	Nombre de succès dans n essais indépendants
Géométrique	Discrète	p	$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	Nombre d'essais avant le 1er succès
Poisson	Discrète	λ	$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ	Modélisation d'événements rares (ex : appels téléphoniques par heure)
Uniforme (discrète)	Discrète	a, b	$P(X = k) = \frac{1}{b-a} \downarrow$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	Distribution égale entre a et b

Uniforme (continue)	Continue	a, b	$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Valeurs équiprobables sur $[a, b]$
Exponentielle	Continue	λ	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	Durée avant un événement (ex : temps d'attente)
Normale (Gaussienne)	Continue	μ, σ^2	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	Phénomènes naturels, erreurs de mesure
Gamma	Continue	k, θ	$f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}$	$k\theta$	$k\theta^2$	Temps avant k événements dans un processus de Poisson
Chi-deux (χ^2)	Continue	k	$f(x) = \frac{x^{(k/2)-1} e^{-x/2}}{2^{k/2} \Gamma(k/2)}$	k	$2k$	Tests statistiques
Student (t de Student)	Continue	ν (ddl)	$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	0 (si $\nu > 1$)	$\frac{\nu}{\nu-2} \quad (\nu > 2)$	Tests d'hypothèse (ex :

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle La **probabilité conditionnelle** $p(A|B)$ représente la probabilité que l'événement A se produise, sachant que B est vrai. En d'autres termes, c'est la **fraction** de fois où A est vrai, à condition que B soit déjà vrai.

$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A | B)p(B)$$



Ex : Probabilité qu'une personne soit malade (A) sachant qu'elle présente un symptôme (B).

- **Indépendance**

Deux événements A et B sont indépendants si : $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ ou/et $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$.

Exemple Le résultat d'un lancer de dé est indépendant du résultat d'un autre lancer.

- **Formule de Bayes** Permet de mettre à jour la probabilité d'un événement en fonction de nouvelles informations

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Exemple: Diagnostic médical : probabilité d'avoir une maladie (A) sachant un test positif (B).

Exemple concret A avec Prob

- Dans la détection de spams par **apprentissage automatique**, un modèle probabiliste (comme le classificateur de Bayes naïf) estime la probabilité qu'un e-mail soit un spam en fonction de mots-clés présents dans le message. Ici :
 - L'e-mail est une **variable aléatoire**.
 - Sa **classification** en "spam" ou "non spam" est **incertaine** avant d'être traitée.
- Le modèle utilise une **distribution de probabilité** pour évaluer cette incertitude et classer l'e-mail avec une certaine confiance

Probabilité marginale

Lorsqu'on s'intéresse à la probabilité d'une **variable aléatoire** et pas aux autres variables existantes, on définit sa probabilité marginale, comme suit:

Ex. Soit x et y deux variables aléatoires discrètes, qui prennent les valeurs $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ et $\{v_1, v_2, \dots, v_M\}$, la **probabilité marginale de x** est donnée par:

$$p(x = u_i) = \sum_{j=1}^M p(x = u_i, y = v_j)$$

Références

1. M. S. Allili. Techniques d'apprentissage automatique (Cours de 2e cycle). Université du Québec en Outaouais (UQO), Québec, Canada. Hivers 2015.
2. S. Rogers et M Girolami. A first Course in machine learning, CRC press, 2012.
3. C. Bishop. Pattern Recognition and Machine learning. Springer 2006.
4. R. Duda, P. Storck et D. Hart. Pattern Classification. Prentice Hall, 2002.