Cours de la matière : Théorie des graphes
Pour les étudiants de la première année Master Mathématiques Appliquée et Fondamentales
Département de mathématiques
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila
Anné universitaire 2024/2025

Cours N : 1.

Table des matières

introduction **3**

1 Terminologie et notions fondamentales de la théorie des graphes **5**

1.1 Terminologie et définitions générales 5

1.2 Couplage 9

1.3 Quelques paramètres d'un graphe : 9

1.3.1 Distance, Excentricité, Diamètre et Rayon d'un graphe 9

1.3.2 Le nombre chromatique 9

2 Modes de representation d'un graphe **12**

2.1 Représentation d'un graphe 12

2.1.1 Représentation graphique 12

2.1.2 Représentation Matricielle 13

Introduction

La théorie des graphes est un domaine des mathématiques qui étudie les structures discrètes appelées *graphes*, composées de *sommets* et d'*arêtes*. Elle joue un rôle fondamental dans de nombreuses disciplines, notamment en recherche opérationnelle, en informatique, en ingénierie et en sciences sociales. Cette introduction présente les fondements de la théorie des graphes, son histoire et ses principaux domaines d'application.

La recherche opérationnelle s'intéresse à l'optimisation des systèmes complexes, et la théorie des graphes y occupe une place centrale. Des problèmes tels que le plus court chemin (Dijkstra), le problème du voyageur de commerce (TSP), et les problèmes d'affectation et de planification reposent sur des structures de graphes. En modélisant ces systèmes sous forme de graphes, il devient possible d'appliquer des algorithmes efficaces pour optimiser les ressources et minimiser les coûts.

L'origine de la théorie des graphes remonte à Leonhard Euler, qui en 1736 résolut le célèbre problème des sept ponts de Königsberg, posant ainsi les bases de la discipline. Par la suite, de nombreux mathématiciens, tels que Kirchhoff (circuits électriques), König (coloration des graphes) et Erdos (théorie des graphes extrémale), ont contribué à son développement. Aujourd'hui, la théorie des graphes est un domaine de recherche actif avec des applications croissantes.

La théorie des graphes trouve des applications dans de nombreux domaines :

— **Informatique** : Représentation et recherche sur les réseaux (internet, bases de données, intelligence artificielle, blockchain).

— **Transport et logistique** : Optimisation des itinéraires, planification des réseaux ferroviaires et aériens.
— **Biologie et chimie** : Analyse des interactions biologiques, modélisation des structures moléculaires.
— **Télécommunications** : Conception des réseaux de communication et analyse du routage des paquets.
— **Sciences sociales** : Études des réseaux sociaux et des interactions humaines.

La théorie des graphes est un outil puissant permettant de modéliser et résoudre des problèmes complexes dans divers domaines scientifiques et industriels. Ce cours vise à fournir les bases théoriques et les méthodes algorithmiques essentielles pour comprendre et appliquer cette discipline.

1

Terminologie et notions fondamentales de la théorie des graphes

Dans cette section nous présentons la terminilogie et quelques notions de base de la thèorie des graphes.

1.1 Terminologie et définitions générales

Concepts de graphes

Un *graphe* est un couple $G = (V, E)$ où :

- V est un ensemble fini non vide appelé ensemble des *sommets* (ou *nœuds*).
- $E \subseteq V \times V$ est un ensemble d'arêtes (ou arcs) reliant les sommets.

Si les arêtes sont des couples ordonnés, alors le graphe est dit *orienté* (ou *digraphe*). Sinon, il est dit *non orienté*.

Graphe simple
Un graphe G est dit simple s'il ne comporte pas de boucle, et si chaque paire de sommets v_i et v_j sont relié par au plus une arête .

Graphe trivial :
Un graphe trivial est un graphe qui contient un seul ou aucun sommet.

Graphe orienté et graphe non orienté

Un **graphe orienté** $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles : un ensemble fini de sommets V et un ensemble fini d'arcs E. Si $e = (v_i, v_j)$ est un arc du graphe G, alors v_i est l'extrémité initiale de e et v_j est l'extrémité finale de e.

Un **graphe non orienté** $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles : un ensemble fini et non vide de sommets V et un ensemble fini d'arêtes E. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v), notée $e = uv$, où u et v sont les extrémités de e. Dans ce cas, on dit que u et v sont *adjacents* et que l'arête (u, v) est *incidente* à u et à v.
Un sommet est dit *isolé* s'il n'est adjacent à aucun autre sommet de G.

Voisinage
Le voisinage ouvert d'un sommet v, noté $N(v)$ est l'ensemble de sommets adjacents à v.
Le voisinage fermé d'un sommet v, noté $N[v]$ est l'ensemble $N[v] = N(v) \bigcup \{v\}$.

Degré d'un sommet
Le degré d'un sommet v, noté $d_G(v)$ est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

Degré d'un graphe
Le degré d'un graphe est le degré maximum $\Delta(G)$ ou minimum $\delta(G)$ sur tous ses sommets.

Ordre d'un graphe

L'ordre d'un graphe G est le nombre de sommets de ce graphe.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier. Si le degré commun est k, alors on dit que le graphe est k-régulier.

Théorème 1.1 *(Lemme des poignées de mains) La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Sous-graphe et graphe partiel Un graphe $H = (V(H), E(H))$ est un *sous-graphe* de $G = (V(G), E(G))$ si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Pour un ensemble de sommets $S \subset V(G)$, le *sous graphe de G induit* par S est le graphe noté $G[S]$ ayant S pour ensemble de sommets, les arêtes de $G[S]$ sont celles de $E(G)$ dont les deux extrémités sont dans S. Le graphe $G' = (V, E')$ est un graphe partiel de G, si E' est inclus dans E. Autrement dit, on obtient G' en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G.

Chaîne Une *chaîne* P_n dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets x_1, x_2,. . ., x_n telle que pour tout entier i, $1 \leq i \leq n-1$, $e_i{=}x_ix_{i+1} \in E$. L'entier $n-1$ représente la *longueur* de P_n et les sommets x_1 et x_n sont appelés *les deux extrémités* la chaîne P_n.

Une chaîne est dite *élémentaire* si tous ses sommets sont distincts.

Une chaîne est dite simple si toutes ses arêtes sont distinctes.

Exemple 1.1 *Le graphe illustré dans FIG.1.1-(a) représente la chaîne simple élémentaire mais dans FIG.1.1-(b), la chaîne est simple mais non élémentaire.*

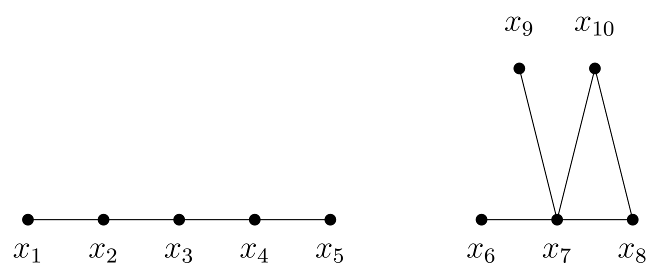

FIGURE 1.1 – (a) La chaîne x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 est simple et élémentaire-(b) La chaîne x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_7, x_9 est simple mais non élémentaire

Chemin dans un graphe orienté Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arcs. Un *chemin* de longueur k dans G est une suite ordonnée de sommets

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$$

telle que $\forall i \in \{0, \ldots, k-1\}$, il existe un arc $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Si tous les sommets $v_0, v_1, \ldots, v_k$ sont distincts, alors le chemin est dit *simple*.

Un chemin est *élémentaire* si aucun sommet, sauf peut-être le premier et le dernier, n'apparaît plus d'une fois.

Graphe connexe et graphe non connexe

Un graphe non orienté est connexe s'il est possible à partir de n'importe quel sommet de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes. Autrement dit, Un *graphe connexe non orienté* est un graphe $G = (V, E)$ tel que pour chaque paire de sommets $u, v \in V$, il existe une chaine simple entre u et v composé uniquement d'arêtes non orientées. Autrement dit, un graphe est connexe si, pour chaque couple de sommets u et v, il existe une suite d'arêtes reliant u à v, sans tenir compte de la direction des arêtes.
Un graphe orienté $G = (V, E)$ est dit *fortement connexe* si pour chaque paire de sommets $u, v \in V$, il existe un chemin dirigé de u à v et un chemin dirigé de v à u. Autrement dit, pour tous les sommets u et v, il existe un chemin dirigé de u vers v et un chemin dirigé de v vers u.

FIGURE 1.2 – (a) Un graphe connexe-(b) un graphe non connexe

Réflexivité Un graphe est dit **réflexif** si, pour tout sommet u, l'arête (u, u) appartient à l'ensemble des arêtes. Formellement, un graphe $G = (V, E)$ est réflexif si :

$$\forall u \in V, \quad (u, u) \in E.$$

Symétrie Un graphe est dit **symétrique** si, pour toute arête (u, v), l'arête opposée (v, u) est aussi présente dans le graphe. Formellement, $G = (V, E)$ est symétrique si :

$$\forall (u, v) \in E, \quad (v, u) \in E.$$

Antisymétrie Un graphe est dit **antisymétrique** si, pour toute paire d'arêtes (u, v) et (v, u), on a nécessairement $u = v$. Autrement dit, si $(u, v) \in E$ et $(v, u) \in E$, alors $u = v$. Formellement, $G = (V, E)$ est antisymétrique si :

$$\forall (u, v) \in E, \quad (v, u) \in E \Rightarrow u = v.$$

1.2 Couplage

Soit G un graphe simple. Un couplage C de G est un sous-graphe partiel 1-régulier de G. On peut aussi dire qu'un couplage (ou appariement) est un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes. Un sommet v est saturé par un couplage C si v est l'extrémité d'une arête de C. Dans le cas contraire, v est insaturé. Un couplage maximum est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes. Un graphe peut posséder plusieurs couplages maximum. Un couplage parfait est un couplage où chaque sommet du graphe est saturé.

1.3 Quelques paramètres d'un graphe :

1.3.1 Distance, Excentricité, Diamètre et Rayon d'un graphe

Distance entre deux sommets *La distance* $d(u, v)$ entre deux sommets u et v d'un graphe G est le nombre d'arêtes dans une plus courte chaîne reliant u à v. **Excentricité d'un sommet** L'*excentricité* d'un sommet u dans un graphe G est la plus grande distance entre le sommet u et n'importe quel autre sommet v de G, c'est à dire $e(u) = \max_{v \in V}\{d(u, v)\}$. **Diamètre d'un graphe** Le *diamètre* du graphe G est la plus grande excentricité dans le graphe G, c'est à dire $diam(G) = \max_{u \in V} e(u)$. **Rayon d'un graphe** Le *rayon* du graphe G est l'excentricité minimum sur tous les sommets de G, c'est à dire $rad(G) = \min_{u \in V} e(u)$.

1.3.2 Le nombre chromatique

Le nombre chromtique d'un graphe G noté $\chi(G)$ est le nombre de couleurs à affecter aux sommets de G, de telle sorte que les sommets adjacents seront de couleurs différentes . .

Exercice 1.1 *Reprenons le graphe dans la figure 1.4.*

1. *Calculer l'excentricité de chaque sommet.*
2. *Déduire la valeur du rayon et du Diamètre de ce graphe.*
3. *Calculer le nombre de stabilité et le nombre chromatique de ce graphe.*

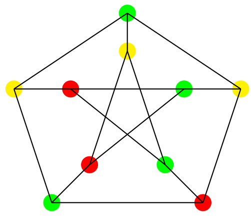

FIGURE 1.3 – Graphe de nombre chromatique $\chi(G) = 3$ et de nombre de stabilité $\alpha(G) = 4$

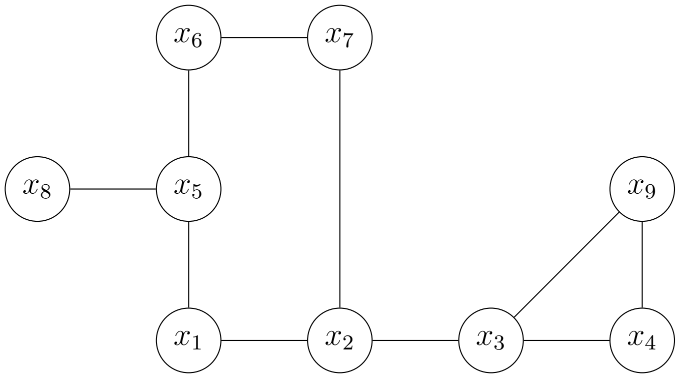

FIGURE 1.4 –

Solution de l'exercice sur le graphe de la figure 1.4 1. Calcul de l'excentricité de chaque sommet On construit la matrice des distances D :

$$D = \begin{array}{c|ccccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\
x_2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\
x_3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 1 \\
x_4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 & 5 & 1 \\
x_5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\
x_6 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\
x_7 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\
x_8 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\
x_9 & 3 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 3 & 5 & 0
\end{array}$$

L'excentricité d'un sommet x_i est le maximum des distances dans sa ligne :

Sommet	Excentricité
x_1	3
x_2	3
x_3	4
x_4	5
x_5	4
x_6	4
x_7	3
x_8	5
x_9	5

2. Rayon et Diamètre du graphe

Le **rayon** $r(G)$ est défini comme le plus petit des excentricités :

$$r(G) = \min\{3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 5\} = 3.$$

Le **diamètre** $d(G)$ est le plus grand des excentricités :

$$d(G) = \max\{3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 5\} = 5.$$

3. Nombre de stabilité et nombre chromatique

Le **nombre de stabilité** $\alpha(G)$ est la taille du plus grand ensemble indépendant :

$$\{x_2, x_4, x_8, x_7\} \quad \Rightarrow \quad \alpha(G) = 4.$$

Le **nombre chromatique** $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier le graphe :

$$\chi(G) = 3.$$

2

Modes de representation d'un graphe

Les graphes sont des structures fondamentales en informatique, utilisées pour modéliser des relations complexes entre objets. Ils peuvent être représentés de différentes manières, notamment par des matrices d'adjacence ou des listes d'adjacence, chacune ayant ses avantages et inconvénients en termes de performance et de simplicité d'implémentation.

2.1 Représentation d'un graphe

2.1.1 Représentation graphique

Il existe une infinité de représentation d'un graphe. Les arêtes ne sont pas forcément rectilignes. Si on peut dessiner une graphe G dans le plan sans qu'aucune arête non coupe une autre ,on dit que G est planaire.

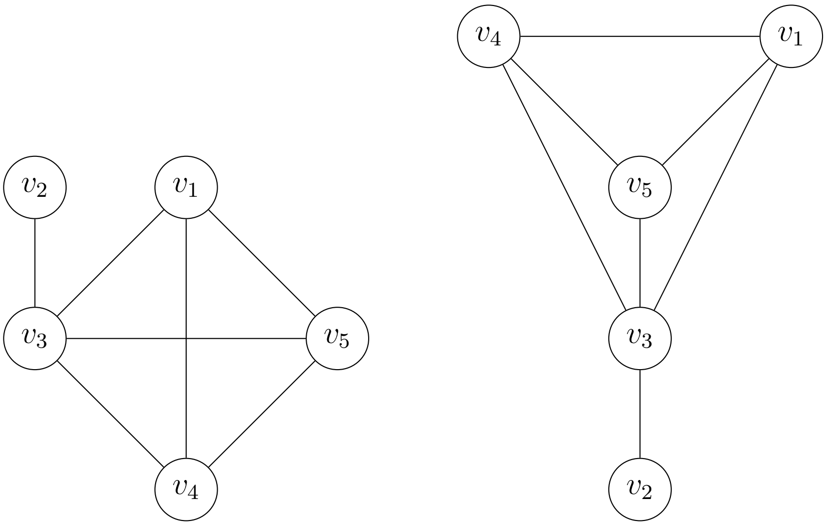

FIGURE 2.1 – (a) Une représentation non planaire du graphe G et (b) sa représentation planaire

2.1.2 Représentation Matricielle

Matrice d'adjacences

On peut Représenter un graphe simple par une matrice $(n * n)$ est un tableau de n lignes et n colonnes , (i,j) désignes l'intersection de la ligne i et de la colonne j. Dans une matrice d'adjacences les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe .Un $\ll 1 \gg$ à la position (i,j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j .

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

- Elle est carrée.
- Il n'y a que des zéros sur la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. Un 1 sur la diagonale indiquerait une boucle.
- Elle est symétrique : $m_{i,j} = m_{j,i}$. On peut dire que la diagonale est un axe de symétrie.
- Il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque graphe. Celle-ci n'est la matrice d ?adjacences d ?aucun autre graphe.

La matrice A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'adjacence du garphe G illustré dans la figure 2.1

Matrice d'incidence

La matrice d'incidence est une matrice n $*$ m où n est le nombre de sommets et m est le nombre d'arêtes du graphe. l'intersection (i,j) contient la valeur
$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si le sommet i est une extrimité de l'arête j ;} \\ o, & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 2.1 *Considérons le graphe non orienté suivant :*

$$G = (V, E) \quad \textit{avec} \quad V = \{A, B, C, D\} \quad \textit{et} \quad E = \{(A, B), (A, C), (B, C), (B, D), (C, D)\}.$$

1. Déterminer la ***matrice d'adjacence*** *de G.*

2. Déterminer la ***matrice d'incidence*** *de G.*

Solution
1. Matrice d'Adjacence
La matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$ d'un graphe non orienté est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour le graphe G, en prenant l'ordre des sommets (A, B, C, D), on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Matrice d'Incidence La matrice d'incidence $M = (m_{ij})$ est définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si le sommet } v_i \text{ est une extrémité de l'arête } e_j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En numérotant les arêtes : $e_1 = (A, B)$, $e_2 = (A, C)$, $e_3 = (B, C)$, $e_4 = (B, D)$, $e_5 = (C, D)$, et en prenant l'ordre des sommets (A, B, C, D), la matrice d'incidence est :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$