Loi des grands nombres (LGN)

Soit $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Si $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, alors :

— **Loi faible :**

$$\frac{S_n}{n} \underset{\mathrm{n} \to \infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(X_1).$$

— **Loi forte :**

$$\frac{S_n}{n} \underset{\mathrm{n} \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_1) \quad p.s.$$

Convergence en loi

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires (définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) et (F_{X_n}) la suite des fonctions de répartition correspondantes ($F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(\{X_n \leq t\})$, $t \in \mathbb{R}$). X_n converge en loi vers X ("$X_n \underset{\mathrm{n} \to \infty}{\Rightarrow} X$) si :

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(t) = F_X(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ point de continuité de } F_X.$$

Théorème central limite (TCL)

Soit $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{E}(X_1) = \mu \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 > 0$. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Alors :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \underset{\mathrm{n} \to \infty}{\Rightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

c'est-à -dire :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq t\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(N.B. : la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est continue sur tout $\mathbb{R}$.)

Processus aléatoire à temps discret

Filtration

Définition

Une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une famille croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ pour tout $0 \leq s \leq t$ dans T.

On dit qu'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite, i.e. :

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in T$$

et si elle est complète, c'est-à-dire $\mathcal{F}_0$ contient les ensembles négligeables ($N = \{N \in \mathcal{F} \mid P(N) = 0\} \subseteq \mathcal{F}_0$).

On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, P)$ l'espace de probabilité filtré satisfait les conditions habituelles.

Processus stochastique

Définition

Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexé par un ensemble T.

$$\begin{cases} X : T \times \Omega \to \mathbb{R} \\ (t, \omega) \mapsto X_t(\omega) \end{cases}$$

En général $T = \mathbb{R}^+$ ou $T = [0, T]$ et on considère que le processus est indexé par le temps $t \in T$. Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:

— pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

— Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \mapsto X_t(\omega)$ est une trajectoire du processus.

Définition

Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Une filtration naturelle à X est la filtration définie par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X(t)\,|\,0 \le s \le t), \quad \forall t \in T$$

Définition (Égalités des processus)

Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ et $Y = (Y_t)_{t\in T}$ deux processus :

1. Deux processus X et Y ont même loi s'ils ont même loi finie-dimensionnelles, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $t_1, \ldots, t_p \in T$.

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_p}) \overset{L}{=} (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_p})$$

2. On dit que $(Y_t)_{t\in T}$ est une modification (ou une version) du processus $(X_t)_{t\in T}$ si pour tout $t \in T$, on a $P(X_t = Y_t) = 1$.
3. Deux processus $(X_t)_{t\in T}$ et $(Y_t)_{t\in T}$ sont dits indistingables si leurs trajectoires coïncident p.s. ; $P(X_t = Y_t, \forall t) = 1$.

Proposition

$$\text{indistinguable} \implies \text{modification} \implies \text{même loi finie-dimensionnelles}$$

Définition (Processus continus)

On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.

Définition (Processus càdlàg et càglàd)

— Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.

— Un processus est dit càglàd (continu à gauche, pourvu de limites à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droite.

Définition (Processus adapté)

Un processus stochastique $X = (X_t, t \in T)$ est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.

Définition (Processus mesurable)

Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit mesurable si l'application suivante est mesurable :

$$\begin{cases} X : (\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}) \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad (t, \omega) \mapsto X_t(\omega) \end{cases}$$

Définition (Processus progressif)

Un processus $X = (X_t; t \geq 0)$ est dit progressif (ou progressivement mesurable) si pour tout $t \geq 0$, l'application $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

$$\begin{cases} X : ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad (s, \omega) \mapsto X_s(\omega) \end{cases}$$

Remarque

1. Un processus progressivement mesurable est adapté.
2. Un processus adapté et à trajectoire continues à droite (ou à gauche) est progressivement mesurable.
3. Un processus mesurable et adapté admet une version progressive.

Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$

Soit $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que

$$\mathbb{P}(\{X_1 = +1\}) = \mathbb{P}(\{X_1 = -1\}) = \frac{1}{2}.$$

Soient $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Le processus $(S_n, n \in \mathbb{N})$ est appelé la **marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$**.

Deux points de vue possibles :

— $(S_n, n \in \mathbb{N})$ est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

— S :

  — $\Omega \to \{\text{suites } (z_n, n \in \mathbb{N}) \text{ à valeurs dans } \mathbb{Z}\}$.

  — $\omega \mapsto S(\omega) = (S_n(\omega)), n \in \mathbb{N}$ est une suite aléatoire.

Propriétés

— **Espérance :** $\mathbb{E}(X_1) = 0 \implies \mathbb{E}(S_n) = 0$.

— **Variance :** $\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) = 1 \implies \mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) = n$.

— Loi des grands nombres

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \quad p.s.$$

— Théorème central limite (TCL)

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \text{i.e} S_n \simeq \sqrt{n} Z.$$

Généralisations

— **Marche aléatoire asymétrique sur $\mathbb{Z}$:** $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où X_i sont i.i.d., $\mathbb{P}(\{X_1 = +1\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X_1 = -1\}) = p \neq \frac{1}{2}$.

— **Marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$:** $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où X_i sont i.i.d. et $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ (par exemple).

— **Temps continu :** mouvement brownien.

Martingale

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

— Une **filtration** est une famille $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

— Un **processus aléatoire à temps discret** $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est **adapté** à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ si X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable $\forall n \in \mathbb{N}$.

— La **filtration naturelle** d'un processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est donnée par $(\mathcal{F}_n^X, n \in \mathbb{N})$, où $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_i, 0 \leq i \leq n)$.

Définition

— Une **sous-martingale** (resp. **sur-martingale**) est un processus $(M_n, n \in \mathbb{N})$ adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ tel que :

(*i*) $\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(*ii*) $\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq M_n$ p.s. (resp. $\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq M_n$ p.s.), $\forall n \in \mathbb{N}$.

— Une **martingale** est un processus qui est à la fois une sous-martingale et une sur-martingale, i.e un processus vérifiant (i) et l'égalité dans (ii).

Proposition

Soit $(M_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale. Alors, $\forall m, n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(M_{n+m} \mid \mathcal{F}_n) = M_n \quad \text{p.s.,} \quad \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n) = 0 \quad \text{p.s.,}$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1}) = \mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\mathbb{E}(M_n) = \cdots = \mathbb{E}(M_0).$$

Exemple

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire symétrique à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, i.e $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, avec $(X_i)_{i\geq 1}$ sont i.i.d. et $\mathbb{E}(X_1) = 0$. On pose :

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{(la tribu triviale),} \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_i, 1 \leq i \leq n), \ \forall n \geq 1.$$

Alors, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet :

(0) S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) $\mathbb{E}(|S_n|) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(|X_i|) < \infty$.

(ii) $\mathbb{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = S_n + \mathbb{E}(X_{n+1}) = S_n \quad \text{p.s.}$

Dans cette série d'égalités, on a utilisé successivement :

— le fait que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et la linéarité de l'espérance conditionnelle,

— le fait que S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et X_{n+1} est indépendant de $\mathcal{F}_n$,

— et finalement l'hypothèse que les v.a. X_n sont toutes centrées.

Proposition

Soit (M_n) une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\mathbb{E}(|\varphi(M_n)|) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors, $(\varphi(M_n))$ est une sous-martingale (par rapport à $(\mathcal{F}_n)$). En particulier, (M_n^2) est une sous-martingale.

Démonstration. Par l'inégalité de Jensen (pour l'espérance conditionnelle), on a :

$$\mathbb{E}(\varphi(M_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \geq \varphi(\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) = \varphi(M_n) \quad \text{p.s.}$$

Ce qui prouve la propriété (ii). Les autres vérifications sont triviales.

Définition

Un **temps d'arrêt** par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ est une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que :

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple

Si (X_n) est un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire T_a définie par :

$$T_a = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \geq a\},$$

est un temps d'arrêt, car :

$$\{T_a \leq n\} = \{\exists i \in \{0, \dots, n\} \text{ tel que } X_i \geq a\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{X_i \geq a\} \in \mathcal{F}_n,$$

car chaque événement $\{X_i \geq a\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n$ (du fait que (X_n) est adapté et que $i \leq n$).

Définition

Soit (X_n) un processus adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)$ et T un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)$. On pose :

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) \mathbf{1}_{\{T=n\}}(\omega),$$

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Remarque

Ce théorème reste vrai pour une sous-martingale ou une sur-martingale (avec les inégalités correspondantes).

Lemme

Y est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable ssi $Y \mathbf{1}_{\{T=n\}}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $\forall n$.

Démonstration (Théorème d'arrêt)

Démontrons tout d'abord que si T est un temps d'arrêt tel que $0 \leq T(\omega) \leq N, \forall \omega \in \Omega$, alors

$$\mathbb{E}(M_N \mid \mathcal{F}_T) = \sum_{n=0}^{N} M_n \mathbf{1}_{\{T=n\}} = M_T \quad \text{p.s.} \tag{1}$$

Appelons Z le terme du milieu de l?équation ci-dessus. Pour vérifier que $\mathbb{E}(M_N \mid \mathcal{F}_T) = Z$, il faut vérifier les deux points de la définition de l?espérance conditionnelle :

(i) Z est $\mathcal{F}_T$-mesurable : effectivement, $Z\mathbf{1}_{\{T=n\}} = M_n \mathbf{1}_{\{T=n\}}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable $\forall n$, donc par le lemme, Z est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

(ii) $\mathbb{E}(ZU) = \mathbb{E}(M_N U), \quad \forall\, U$ v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable et bornée :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(ZU) &= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}(M_n \mathbf{1}_{\{T=n\}} U) \overset{(a)}{=} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_N \mid \mathcal{F}_n) \mathbf{1}_{\{T=n\}} U) \overset{(b)}{=} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}(M_N \mathbf{1}_{\{T=n\}} U) \\ &= \mathbb{E}(M_N U), \end{aligned} \quad \text{car :}$$

(a) : (M_n) est une martingale. (b) : $\mathbf{1}_{\{T=n\}} U$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable par le lemme.

En utilisant (1) avec $T = T_1$ et $T = T_2$ successivement, on trouve donc que

$$M_{T_1} = \mathbb{E}(M_N \mid \mathcal{F}_{T_1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_N \mid \mathcal{F}_{T_2}) \mid \mathcal{F}_{T_1}) = \mathbb{E}(M_{T_2} \mid \mathcal{F}_{T_1}) \quad \text{p.s.,} \tag{c}$$

où (c) découle du fait que $\mathcal{F}_{T_1} \subseteq \mathcal{F}_{T_2}$ (car $T_1 \leq T_2$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.Jeanblanc. (2006). M.Jeanblanc. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes.