# Chapitre 2

# Interprétation Géométrique de la Programmation Linéaire



## 2.1 Introduction

Après avoir illustré par des exemples, comment un problème pratique peut être modélisé par un programme linéaire. Dans ce chapitre, l'étape qui va suivre sera certainement celle de la résolution de ce problème mathématique. La méthode graphique est l'une des premières méthodes utilisées à ce sujet.

La résolution graphique d'un Programme Linéaire, consiste à représenter l'ensemble des contrainte, par des zone d'admissibilités, sur un repère cartésien. Et de définir la solution qui offre l'optimum du programme.

Par conséquent, on doit se limiter à une représentation à deux variables et au plus à trois variables. Ceci indique que dans ce chapitre on examinera seulement les programmes linéaires à deux variables de décision.

## 2.2 Rappels sur les bases de l'Algèbre linéaire

### 2.2.1 Espaces vectoriels

Soit un vecteur $x \in \mathbb{R}$, celui-ci peut s'écrire : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ou encore :

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avec $e_i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \ \ i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$

Les $x_i$ sont les composantes du vecteur $x$.

L'ensemble des $n$ vecteurs $\{e_i \in \mathbb{R}^n / i = 1\}$ forme la base canonique de $\mathbb{R}^n$. C'est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

**Définition 2.2.1 (Espace vectoriel)** *Un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$ tel que :*

1) *$(E, +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre noté $0_E$ c'est à dire :*
   - *$(+)$ associative : $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$*
   - *$(+)$ commutative : $\forall x, y \in E; x + y = y + x$*
   - *Il existe un élément neutre : $\exists 0_E \in E, \forall x \in E, 0_E + x = x$*
   - *Il existe un élément symétrique : $\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = 0_E$*
2) *$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda . (x + y) = \lambda . x + \lambda . y$ distributivité par rapport à la somme des vecteurs.*
3) *$\forall \lambda, \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E : (\lambda\alpha) . x = \lambda . (\alpha . x)$ associativité mixte.*
4) *$\forall \lambda, \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda : (\lambda + \alpha) . x = \lambda . x + \alpha . x$ distributivité par rapport à la somme des scalaires.*
5) *$\forall x \in E : 1_{\mathbb{K}} . x = x$*

les éléments de $E$ sont appelés vecteurs , et les éléments de K sont appelés scalaires étant donné $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \otimes E$ on écrit souvent $\lambda x$ au lieu de $\lambda.x$ dans la suite $0_E$ désignera l'élément neutre de $(E, +)$. $0_E$ est appelé le vecteur nul de $E$.

### 2.2.2 Géométrie de la programmation linéaire

En particulier, nous verrons que la notion de convexité et la géométrie des polyèdres et polytopes joueront un rôle majeur dans la programmation linéaire.

**Définition 2.2.2 (Ensemble convexe)** *Un sous-ensemble $C \subset V$ d'un espace vectoriel $V$ est convexe ssi :*

$$\forall x \in C, \forall y \in C \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

*Cette définition signifie qu'un ensemble C est convexe si le segment joignant deux de ses points quelconques est contenue dans l'ensemble C.*

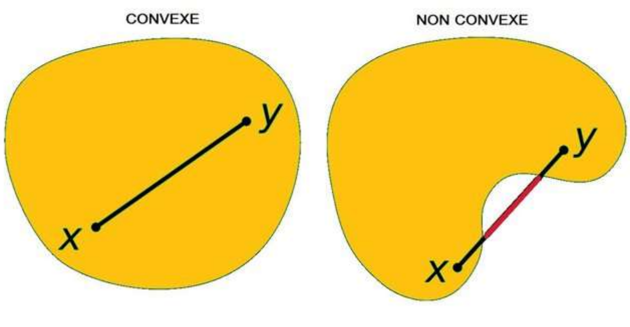



FIGURE 2.1 – Ensemble Convexe et Non Convexe

**Propriété 2.2.1**

- *L'intersection d'une collection arbitraire d'ensembles convexes est un ensemble convexe.*

$$C = \bigcap_{i \in I} C_i \text{ est convexe.}$$

- *Si C est convexe et $\beta \in \mathbb{R}$, l'ensemble :*

$$\beta C = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \beta c \quad c \in C\} \text{ est convexe.}$$

- *Si C, D sont deux sous-ensembles convexes de V alors l'ensemble :*

$$C + D = \{x \in \mathbb{R}^n : x = c + d,\ c \in C,\ d \in D\} \text{ est convexe.}$$

**Définition 2.2.3 (Combinaison convexe)** *Soient $x_1, \cdots, x_k \in \mathbb{R}^n$, une combinaison convexe de $x_1, \cdots, x_k$ est le vecteur*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} = \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

**Définition 2.2.4 (Hyperplan)** *Soit $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. L'ensemble défini par :*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x = c\} \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^n$$

**Définition 2.2.5 (Polyèdre)** *Un polyèdre $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble décrit par*

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx \succeq c\} \text{ où } C \in \mathbb{R}^{r \times n} \text{ et } c \in \mathbb{R}^r$$

*Un polyèdre est formé comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.*

**Définition 2.2.6 (Point extrême et sommet)**

- *Étant donné un polyèdre $\mathcal{P}$, un vecteur $x \in \mathcal{P}$ est un **point extrême** de $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas deux vecteurs $y, z \neq x \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in ]0,1[$ tels que*

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z$$

- *Étant donné un polyèdre $\mathcal{P}$, un vecteur $x \in \mathcal{P}$ est un **sommet** de $\mathcal{P}$ s'il existe un vecteur c tel que*

$$c^t x < c^t y, \forall y \neq x \in \mathcal{P}$$

### 2.2.3 Règles de calcul dans un $\mathbb{K}$-ev

**Proposition 2.2.1** *Si $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel alors on a :*

1) $\forall x \in E : 0 \,.\, x = 0_E$
2) $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \,.\, 0_E = 0_E$
3) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee x = 0$
4) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E : (-\alpha) \,.\, x = \alpha \,.\, (-x)$
5) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2 : (\alpha - \beta) x = \alpha x - \beta x \wedge \alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$

**Définition 2.2.7 (Sous espace vectoriel)** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s.s.s. F est un sous-groupe de $(E, +)$ qui est stable par la multiplication par les scalaires.*

*Autrement dit F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ avec les mêmes lois interne et externe que celles de E .*

**Proposition 2.2.2 (Caractérisation d'un sous-espace)** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $F \subset E$.*

*Alors F est un sous-espace de E s.s.s. il vérifie les deux propriétés suivantes :*

1) $0_E \in F$.
2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2 : \lambda x + \mu y \in F$.

## 2.3 Résolution graphique d'un programme linéaire

Les problèmes d'application de la programmation linéaire sont, en pratique, constitués de plusieurs variables de décision dont la résolution nécessite l'utilisation de la méthode (algorithme) du simplexe ainsi qu'un logiciel permettant d'optimiser un modèle de programmation linéaire. La méthode graphique est peu utilisée en pratique, cette méthode n'est applicable que dans le cas où il n'y a que deux variables, par contre, son avantage est de pouvoir comprendre ce que fait la méthode générale du Simplexe, sans entrer dans la technique purement mathématique.

**Définition 2.3.1 (Solution)** *Une solution du programme linéaire est un ensemble de valeurs de variables de décision qui satisfont toutes les contraintes.*

**Définition 2.3.2 (Solution réalisable (faisable))** *Une solution réalisable du programme linéaire est un ensemble de valeurs de variables de décision qui satisfont toutes les contraintes fonctionnelles et de non-négativité.*

**Définition 2.3.3 (Région (Domaine) des solutions réalisables (région de faisabilité))** *La région des solutions réalisables est l'ensemble de toutes les solutions réalisables du modèle de programmation linéaire.*

**Définition 2.3.4 (Solution réalisable optimale)** *La solution réalisable optimale est une solution réalisable du programme linéaire qui optimise (maximise ou minimise) la fonction objective.*

**Définition 2.3.5 (Solution d'un programme linéaire)** *La solution d'un programme linéaire dépend de la région des solutions réalisables (vide, bornée ou non bornée) et le type d'optimisation (maximisation ou minimisation), la solution optimale du programme linéaire correspondant soit unique, multiple, infinie ou pas de solution.*

**Définition 2.3.6 (Sommet du polygone)** *On appelle sommet du polygone un point intersection de 2 contraintes à l'égalité vérifiant toutes les contraintes.*

## 2.4 Principes de la méthode graphique d'un PL

Un problème linéaire est résolu graphiquement en procédant comme suit :

- Représentation graphique de la région réalisable.
- Représentation graphique de la fonction objectif.
- Détermination de la solution optimale.

De manière très générale, la résolution d'un problème de programmation linéaire nécessite la mise en œuvre d'un algorithme. La résolution d'un PL en utilisent la méthode graphique pour déterminer la solution optimal, il y un algorithme à suivre pour résoudre un programme linéaire en utilisant la méthode graphique présente ci-dessous :

### 2.4.1 Exemple [1]

Afin d'illustrer le processus de résolution d'un programme linéaire avec 2 variables de décision par la méthode graphique, nous considérons le programme linéaire suivant :

$$Max\ z = 400x_1 + 800x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 10000 & (1) \\ 2x_1 + 6x_2 \leqslant 48000 & (2) \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 24000 & (3) \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Exemple du cours du Prof. Anne-Marie Charles, l'Université Paris-dauphine

**Algorithm 2.1** Méthode Graphique

Réaliser un repère orthonormé $(OX_1X_2)$
Représenter graphiquement les droites (équations provenant des inéquations) c.-à-d tracer les contraintes (fonctionnelles et de non-négativité) et déterminer le demi-plan fermé satisfaisant chaque contrainte.
Tracer la région réalisable (admissible) $(\mathbb{P})$, c'est l'intersection entre tous les demi-plans satisfaisant les différentes contraintes.
**Si** ($\mathbb{P}$ est borné) **Alors** la solution optimale existe.
**Si** ($\mathbb{P}$ est non borné) **Alors** on distingue les deux cas suivants :
    **Si** (le problème est a maximiser) **Alors** aucune solution.
    **Si** (le problème est a minimiser) **Alors** une solution optimale existe.
Chercher tous les points sommets de $(\mathbb{P})$ et parmi ceux-ci, choisir le point qui rend l'objectif optimal par deux méthodes :
    Méthode de recensement des sommets.
    Méthode des droites parallèles (Repérage géométrique).

Le PL peut être résolu de manière graphique en suive le processus qui donne par l'algorithme 2.1 :

**Étape 1 : Réaliser un repère orthonormé $(OX_1X_2)$.**

Une des conditions de la réussite de notre représentation graphique est le choix d'un système d'axes. Un mauvais choix peut rendre notre représentation non claire et imprécise.

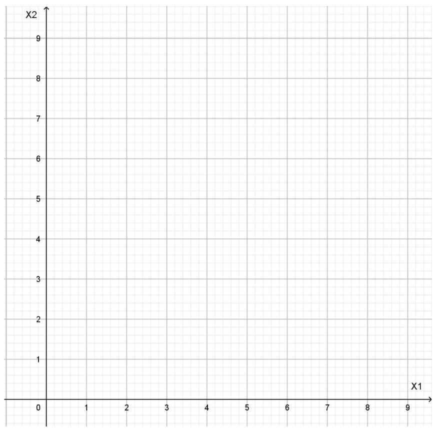



FIGURE 2.2 – Système d'axes

A cause des contraintes de non-négativité des variables de décision, nous nous intéressons seulement au cadran positif (voir figure 2.2 ci-dessus). Cette région s'appelle la région des solutions possibles du problème.

Un bon choix se base sur une lecture des différents paramètres du programme linéaire. Dans notre cas, on ne peut qualifier de bon, le choix de 100 comme unité dans les deux axes.

Pour l'exemple, on peut choisir le système d'axes présenté dans la figure 2.3.

**Étape 2 : Représentation graphique des contraintes.**

Parmi les solutions possibles d'un problème, il y a ceux qui vont satisfaire toutes les contraintes du programme, appelés solutions réalisables, et ceux qui vont satisfaire une partie ou aucune de ces contraintes, appelés solutions non réalisables.

Une représentation graphique des inégalités (des contraintes) va nous permettre de déterminer l'ensemble des solutions réalisables.

l'interprétation graphique d'une contrainte (1) : $x_1 + x_2 \leqslant 10000$.

- La droite $x_1 + x_2 = 10000$ passe par les points (0,10 000) et (10 000,0) et divise le plan en 3 parties :

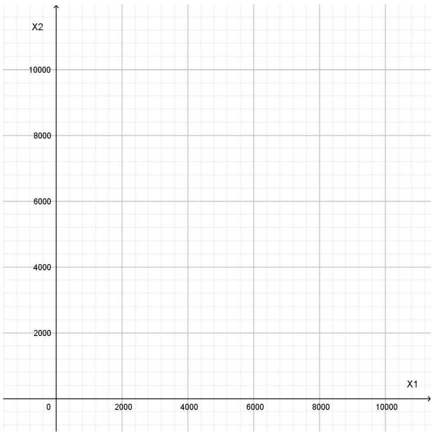



FIGURE 2.3 – Le système d'axes choisi pour l'exemple

- — La partie au dessus de la droite correspond à l'ensemble des points tels que $x_1 + x_2 > 10000$.
- — La partie en dessous de la droite correspond à l'ensemble des points tels que $x_1 + x_2 < 10000$.
- — La partie sur la droite correspond à l'ensemble des points tels que $x_1 + x_2 = 10000$.

- La solution du problème sera en dessous ou sur la droite
- Répéter ce raisonnement pour tous contraintes donne une région convexe appelée un polyèdre. Cette région correspond à l'ensemble des points réalisables.

**Étape 3 : Tracer la région réalisable.**

A chaque couple de variables $x_1$ et $x_2$, on associe un point du plan dont les coordonnées correspondent aux valeurs des variables.

Les variables étant positives, ces points sont situés dans l'orthant positif.

Chaque contrainte permet de délimiter une partie du plan. Par exemple, la droite d'équation $x_1 + x_2 = 10000$ définit 2 demi-plans.

Au-dessus de cette droite, les coordonnées des points du plan vérifient $x_1 + x_2 > 10000$. On est donc conduit à exclure ces points.

Les solutions réalisables du problème correspondent aux points du plan situés à l'intérieur du polyèdre $\mathbb{P}$ : $O\ A\ B\ C\ D$ et sur ses bords (voir la figure 2.4).

On fait de même pour les 2 autres contraintes. On trace les droites d'équation $x_1 + 2x_2 = 48000$ et $3x_1 + x_2 = 24000$ et on élimine les points situés au-dessus de ces droites.

**Étape 4 : Chercher tous les points sommets de ($\mathbb{P}$).**

Le problème est de connaître qu'elle est la droite qui correspond à la valeur maximal (minimal) de la fonction objectif ?

Il s'agit maintenant de déterminer parmi tous ces points celui ou ceux qui correspondent à la plus grande valeur possible pour la fonction objectif $400x_1 + 800x_2$

Considérons la droite d'équation $400x_1 + 800x_2 = k$ où k est une constante. Tous les points situés sur cette droite donnent à l'expression $400x_1 + 800x_2$ la même valeur k. Ils sont équivalents du point de vue du profit.

Si on déplace cette droite vers la droite, la valeur de k augmente. Dans notre exemple, la valeur limite pour k est obtenue pour la droite passant par le point B (voir la figure 2.5).

On peut conclure que sur l'ensemble du domaine des solutions réalisables, celle qui donne la plus grande valeur à la fonction objectif correspond au point B dont les coordonnées peuvent être calculés comme point d'intersection des contraintes (1) et (2).

La solution optimale du problème est $x_1 = 3000$, et $x_2 = 7000$. La valeur maximale de la fonction objectif est : 6800000.

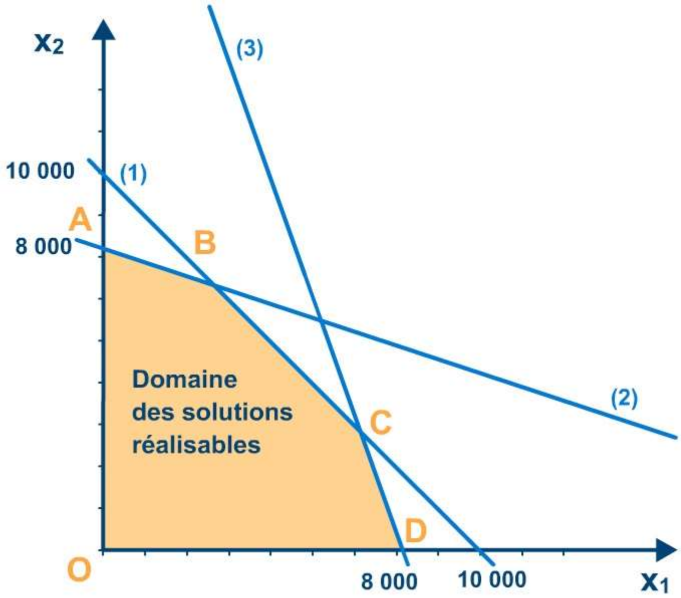



FIGURE 2.4 – Ensemble des solutions réalisables.

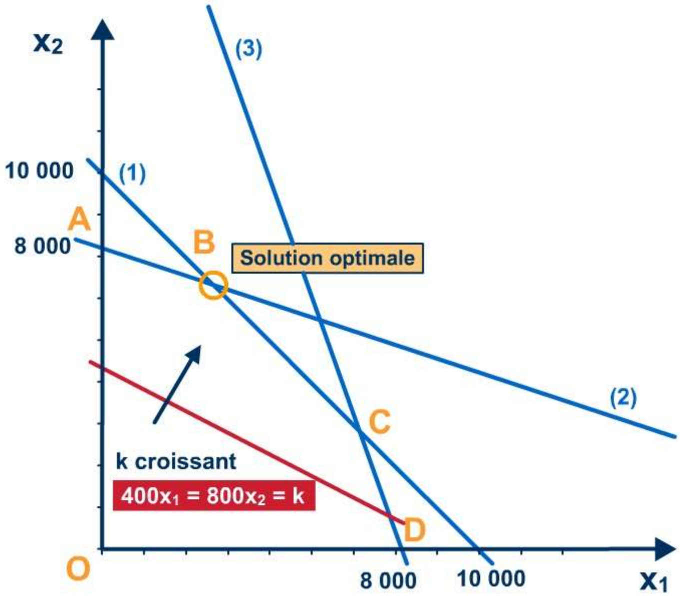



FIGURE 2.5 – Déterminer la solution optimale.

On dit que les contraintes (1) et (2) sont saturées ou liées : elles sont vérifiées avec égalité à l'optimum alors que la contrainte (3) est non saturée ou non liée : il y a une marge entre la valeur de son premier et celle de son second membre à l'optimum.

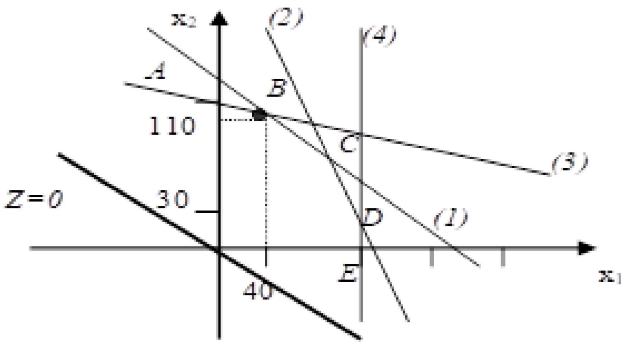
## 2.5 PL résolu par la méthode graphique (Pratique)

Dans cette section on donne quelques exemples de résolution graphique de problèmes linéaires relatifs au différents cas possibles :

**Problème de maximisation**

$$Max\,z = 100x_1 + 200x_2$$

$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 150 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 440 & (2) \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 480 & (3) \\ x_1 \leqslant 90 & (4) \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

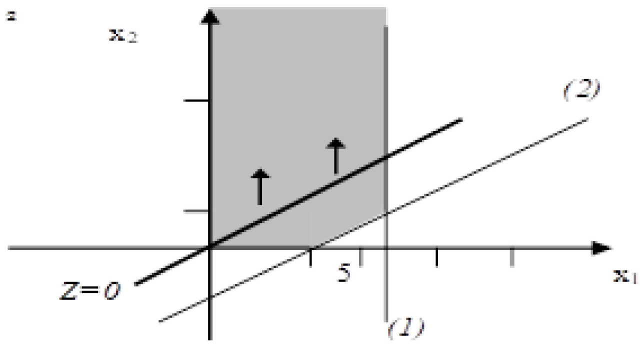



**La solution optimale est B(40,110)**

**Problème avec solution non bornée**

$$Max\,z = -2x_1 + 3x_2$$

$$S.C \begin{cases} x_1 \leqslant 5 & (1) \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6 & (2) \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

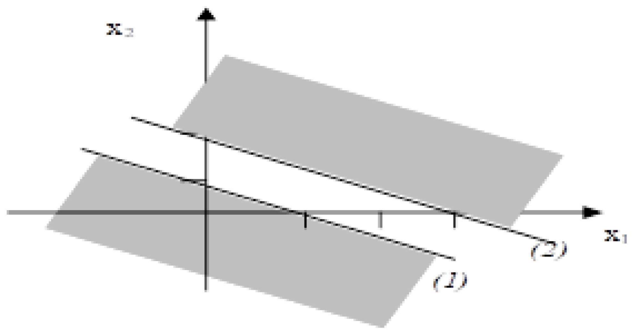



**On peut augmenter la valeur de la fonction objectif dans la direction des flèches indéfiniment donc la solution est non bornée.**

**Problème impossible**

$$Max\,z = 3x_1 + 2x_2$$

$$S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 2 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 8 & (2) \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

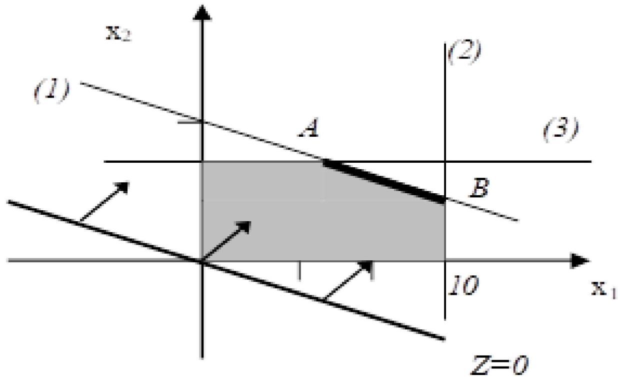



**L'espace des solutions réalisables est vide,**
**il est l'intersection des deux zones grises de la figure ci-dessus**

**Problème à solutions multiples**

$$Max\, z = x_1 + 3x_2$$

$$S.C \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leqslant 30 & (1) \\ x_1 \geqslant 10 & (2) \\ x_2 \geqslant 4 & (3) \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

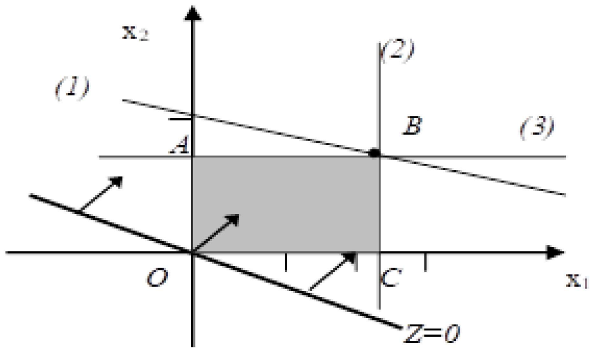



**L'ensemble des points décrit par le segment [AB] représente les solutions optimales du problème linéaire**

**Problème de dégénérescence**

$$Max\, z = x_1 + x_2$$

$$S.C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 40 & (1) \\ x_1 \geqslant 10 & (2) \\ x_2 \geqslant 5 & (3) \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$




**La solution optimale B(10,5) est dite dégénérée si trois contraintes concourent en ce point.**