Chapitre 1

Introduction Générale & Formulation d'un Programme Linéaire (Modélisation)

1.1 Introduction

L'importance de l'optimisation et la nécessité d'un outil simple pour modéliser des problèmes de décision que soit économique, militaire ou autres on fait de la programmation linéaire un des champs de recherche les plus actifs au milieu du siècle précédent. Les premiers travaux [1] (1947) sont celle de George B. Dantzig et ses associés du département des forces de l'air des États Unis d'Amérique.

Les problèmes de programmations linéaires sont généralement liés à des problèmes d'allocations de ressources limitées, de la meilleure façon possible, afin de maximiser un profit ou de minimiser un coût. Le terme meilleur fait référence à la possibilité d'avoir un ensemble de décisions possibles qui réalisent la même satisfaction ou le même profit. Ces décisions sont en général le résultat d'un problème mathématique.

Une des méthodes les plus connues pour résoudre des programmes linéaires en nombre réels est la méthode du Simplex. En théorie, elle a une complexité non polynômiale et est donc supposée peu efficace. Cependant, en pratique, il s'avère au contraire qu'il s'agit d'une bonne méthode. De plus, de nombreux logiciels intégrant cette méthode existent. Certains sont utilisés via une interface graphique alors que d'autres permettent une communication par fichiers ce qui autorise l'utilisation du programme de manière cachée dans le développement d'un autre logiciel.

1. De nombreux mathématiciens, parmi eux le Russe L. V. Kantorovich, se sont penchés sur le problème de programmation linéaire avant 1947

1.2 Historique de la programmation linéaire

Le développement de la théorie et des outils de la programmation linéaire a réellement pris son essor à partir des années 1940 même si les structures mathématiques sous-jacentes ainsi que quelques éléments algorithmiques ont vu le jour durant la période 1870 -1930 avec les travaux de J.B. Fourier (fondements de la programmation linéaire et de la méthode du simplexe), T. Motzkin (théorie de l'élimination, dualité) et Farkas (dualité)..etc.

Les premiers mathématiciens qui se sont occupés de problèmes, que l'on ne nommait pas encore à l'époque "programmes linéaires" (P.L.), sont : LAPLACE (1749-1827) et le baron FOURIER. Cependant, la fondation de la programmation linéaire en tant que domaine d'étude est principalement créditée à G.B. Dantzig auteur de l'algorithme du simplexe en 1947 dans le contexte du projet SCOOP (Scientific Computation of Optimal Programs) et du complexe militaro-industriel installé au sein de l'US Air Force au Pentagone. L'algorithme devait répondre aux besoins de planification des transports lors d'opérations militaires modélisés comme un problème de programmation linéaire. Bien que, le russe KANTOROVITCH, mathématicien et économiste soviétique, en 1939 a imaginé une méthode inspirée des multiplicateurs de LAGRANGE, classiques en mécanique, pour résoudre des "programmes de transport". De plus, au milieu des années 80, l'indien KARMARKAR a proposé une nouvelle méthode créée aux Bell Laboratories qui permettait de résoudre de très gros problèmes linéaires, par une démarche "intérieure" au polyèdre des solutions admissibles. Néanmoins, la contribution décisive a été l'invention de l'algorithme du SIMPLEXE développé à partir de 1947 notamment par G.B. DANTZIG et le mathématicien VON NEUMANN, qui est le plus célèbre (et le plus efficace dans le cas général) des algorithmes de résolution, bien qu'il ne soit pas polynomial ! Cependant, un problème linéaire continu peut être résolu en temps polynomial (Khachiyan 1979) [2].

Il existe de nombreux solveurs de PL : des solveurs commerciaux Cplex (IBM), Xpress, Gurobi (Microsoft), et même Matlab ou Excel... ; des solveurs académiques Lp de COIN-OR, Soplex de la ZIB ; et des solveurs libres comme Glpk (gnu). Les meilleurs d'entre eux peuvent résoudre des PL jusqu'à 200000 variables et 200000 contraintes en quelques secondes.

1.3 Définition de la programmation linéaire (PL) :

La programmation linéaire est dans les fondements de la recherche opérationnelle (RO) ou aide à la décision : propose des modèles conceptuels pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire les choix les plus efficaces.

De nombreux phénomènes économiques et industriels peuvent se modéliser par des systèmes mathématiques d'inégalités et d'égalités linéaires conduisant à des problèmes d'optimisation linéaire. Dans ces problèmes d'optimisation linéaire, on cherche à minimiser ou maximiser une fonction linéaire sous des contraintes linéaires portant sur les variables du problème. On parle souvent de programmation linéaire (ou encore de programme linéaire), le terme de programmation faisant référence à l'idée d'organisation et de planification lié à la nature des phénomènes modélisés. Ce terme a été introduit pendant la Seconde Guerre mondiale et systématiquement utilisé à partir de 1947 lorsque G. Dantzig inventa la méthode du simplexe pour résoudre les problèmes de programmation linéaire.

Définition 1.3.1 (William J. BAUMAUL) *La programmation linéaire est une technique mathématique d'optimisation (maximisation ou minimisation) de fonction à objectif linéaire sous des contraintes ayant la forme d'inéquations linéaires. Elle vise à sélectionner parmi différentes actions celle qui atteindra le plus probablement l'objectif visé.*

Définition 1.3.2 (Robert DORFMAN et Paul SAMUELSON) *La programmation linéaire est une méthode de détermination du meilleur plan d'action pour réaliser des objectifs donnés dans une situation où les ressources*

2. Khachiyan, L.G. (1979) A Polynomial Algorithm in Linear Programming. Soviet Mathematics Doklady, 20, 191-194.

sont limitées. C'est donc une méthode de résolution du problème économique, soit dans le cadre d'une économie globale, soit dans celui du secteur public, soit dans une entreprise particulière.

1.4 Présentation théorique de la programmation linéaire

Un programme linéaire consiste à trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines équations et inégalités dites contraintes. En langage mathématique, on décrira de tels modèles de la manière suivante :

Soient n variables de décision $x_1, x_2, \cdots, x_n$, l'hypothèse que les variables de décision sont positives implique que $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0$

La fonction objective est une forme linéaire en fonction des variables de décision de type $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ où les coefficients $c_1, \cdots, c_n$ doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

Par exemple le coefficient c_i peut représenter un profit unitaire lié à la production d'une unité supplémentaire du bien x_i, ainsi la valeur de z est le profit total lié à la production des différents biens en quantités égales à $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Supposons que ces variables de décision doivent vérifier un système d'équations linéaires définis par m inégalités

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2\\
\vdots \quad &\quad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m
\end{aligned}$$

où les coefficients $a_{1n}, \cdots, a_{mn}$ et $b_1, \cdots, b_m$ doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Le paramètre b_j représente la quantité de matière première disponible dont le bien x_i utilise une quantité égale à $a_{ij}x_i$.

En suivant les étapes de formulation ci-dessus, on peut représenter le PL comme suit :

$$Max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$S.C \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2\\
\quad \vdots \quad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m\\
x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{cases}$$

1.5 Formulation d'un programme linéaire (PL) (Modélisation)

Dans ce qui suit, on présentera les conditions et les étapes de formulation d'un programme linéaire, suives de quelques exemples de formulation en programme linéaire liés à différents problèmes de décision :

1.5.1 Les conditions de formulation d'un programme linéaire

La programmation linéaire comme étant un modèle admet des hypothèses (des conditions) que le décideur doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème. Ces hypothèses sont [3] :

3. Ces hypothèses résument celles qui ont été donné par G. B. Dantzig : La proportionnalité, La non-négativité, l'additivité et la linéarité de la fonction objective

1) Les variables de décision du problème sont positives.
2) Le critère de sélection de la meilleure décision est décrit par une fonction linéaire de ces variables, c'est à dire, que la fonction ne peut pas contenir par exemple un produit croisé de deux de ces variables. La fonction qui représente le critère de sélection est dite fonction objectif (ou fonction économique).
3) Les restrictions relatives aux variables de décision (exemple : limitations des ressources) peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.
4) Les paramètres du problème en dehors des variables de décisions ont une valeur connue avec certitude.

1.5.2 Les étapes de formulation d'un programme linéaire

Généralement, il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

1) Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exemple : x, y).
2) Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.
3) Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

1.5.3 Exemple 1 (Problème d'agriculture) [4]

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 440 m^3 d'eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, 4 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 100 dinars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 200 dinars. Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates.

Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Formulation du problème d'agriculture en un PL (Exemple 1)

Étape 1 : Identification des variables de décision. Les deux activités que l'agriculteur doit déterminer sont les surfaces à allouer pour la culture de tomates et de piments :

- x_1 : la surface allouée à la culture des tomates.
- x_2 : la surface allouée à la culture des piments.

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives : $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$.

Étape 2 : Identification des contraintes. Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des facteurs de production :

- *Terrain :* l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \leqslant 150$.
- *Eau :* la culture d'un hectare de tomates demande 4 m^3 d'eau et celle d'un hectare de piments demande 2 m^3 mais l'agriculteur ne dispose que de 440 m^3. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est $4x_1 + 2x_2 \leqslant 440$.

4. Exemple du cours du Prof. Mohamed Saleh Hannachi

- *Main d'œuvre :* Les 480 heures de main d'œuvre seront départager (pas nécessairement en totalité) ente la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est $x_1 + 4x_2 \leqslant 480$.
- *Les limitations du bureau du périmètre irrigué :* Ces limitations exigent que l'agriculteur ne cultive pas plus de 90 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est $x_1 \leqslant 90$.

Étape 3 : Identification de la fonction objectif. La fonction objectif consiste à maximiser le profit apporté par la culture de tomates et de piments. Les contributions respectives 100 et 200, des deux variables de décision x_1 et x_2 sont proportionnelles à leur valeur. La fonction objectif est donc $100x_1 + 200x_2$.

Le programme linéaire qui modélise le problème d'agriculture est :

$$Max\ z = 100x_1 + 200x_2$$

$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 150 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 440 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 480 \\ x_1 \leqslant 90 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.5.4 Exemple 2 (Problème de médecine) [5]

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine. Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Formulation du problème de médecine en un PL (Exemple 2)

Le problème de médecine présente certaines ressemblances avec le problème de l'agriculture, dans les deux cas c'est un problème d'allocation de ressources.

Étape 1 : Les variables de décision qui représentent des valeurs inconnues par le décideur qui est dans ce cas le spécialiste en médecine sont :

- x_1 : le nombre de pilules de petite taille à prescrire.
- x_2 : le nombre de pilules de grande taille à prescrire.

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives : $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$.

Étape 2 : Les contraintes imposées par le problème sur les valeurs possibles de x_1 et x_2 sont :

- La prescription doit contenir des pilules avec au moins 12 grains d'aspirine. Sachant qu'une petite pilule contient 2 grains d'aspirine et qu'une grande pilule contient un seul grain d'aspirine, on obtient la contrainte suivante : $2x_1 + x_2 \geqslant 12$.
- De la même façon que pour l'aspirine, la prescription du spécialiste en médecine doit contenir au moins 74 grains de bicarbonate. Ainsi la contrainte suivante doit être satisfaite : $5x_1 + 8x_2 \geqslant 74$.

5. An introduction to linear programming and the theory of games, A. M. Glicksman

- Finalement la contrainte imposée par le fait que la prescription doit contenir au moins 24 grains de codéine est : $x_1 + 6x_2 \geqslant 24$.

Étape 3 : On remarque qu'il y a plusieurs couples de solutions qui peuvent satisfaire les contraintes spécifiées à l'étape 2. La prescription doit contenir le minimum possible de pilules. Donc le critère de sélection de la quantité de pilules à prescrire est celle qui minimise le nombre total des pilules $z = x_1 + x_2$.

Le programme linéaire qui modélise ce problème médical est donc le suivant :

$$Min\ z = x_1 + x_2$$
$$S.C \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geqslant 74 \\ x_1 + 6x_2 \geqslant 24 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.5.5 Exemple 3 (Problème de production) [6]

Pour fabriquer deux produits P1 et P2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M1, M2 et M3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M1	**M2**	**M3**
P1	11mn	7mn	6mn
P2	9mn	12mn	16mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité. La disponibilité pour chaque machine sont :

- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M1.
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M2.
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M3.

Le produit P1 donne un profit unitaire de 900 dinars et le produit P2 un profit unitaire de 1000 dinars.

Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits P1 et P2 pour avoir un profit total maximum ?

Formulation du problème de production en un PL (Exemple 3)

Étape 1 : Les variables de décisions sont :

- x_1 : le nombre d'unités du produit P1 à fabriquer.
- x_2 : le nombre d'unités du produit P2 à fabriquer.

Étape 2 : Les contraintes outre les contraintes de non-négativité sont :

- $11x_1 + 9x_2 \leqslant 9900$: pour la machine M1.
- $7x_1 + 12x_2 \leqslant 8400$: pour la machine M2.
- $6x_1 + 16x_2 \leqslant 9600$: pour la machine M3.

6. Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle, A. Kaufmann, pp 22-23

Étape 3 : Le profit à maximiser est : $z = 900x_1 + 1000x_2$.

Le programme linéaire résultant est :

$$Max\,z = 900x_1 + 1000x_2$$
$$S.C \begin{cases} 11x_1 + 9x_2 \leqslant 9900 \\ 7x_1 + 12x_2 \leqslant 8400 \\ 6x_1 + 16x_2 \leqslant 9600 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.6 Les formes d'un programme linéaire (Standard, Canonique, Mixte)

Il existe trois formulations du programme linéaire avec la condition de non-négativité (ou de positivité ou de réalisabilité) de l'ensemble des variables $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0$

Forme standard	Forme canonique	Forme mixte
$Max\,z = C.X$ S.C $\begin{cases} A.X = 0 \\ X \geqslant 0 \end{cases}$	$Max\,z = C.X$ S.C $\begin{cases} A.X \leqslant b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$	$Max\,z = C.X$ S.C $\begin{cases} \alpha_i.X \leqslant b_i \; i \in M_1 \\ \alpha_i.X = b_i \; i \in M - M_1 \\ X \geqslant 0 \end{cases}$

Propriété : On peut ramener les formes générales et mixtes à la forme standard ou à la forme canonique et on peut passer de la forme standard à la forme canonique et vice-versa par des opérations élémentaires.

1ère *opération :* $Min f(x) = -Max(-f(x))$.

2^{e} *opération :* on peut remplacer chaque variable par une différence de variables positives $x_j = x_j^{'} - x_j^{''} \geqslant 0$ où $x_j^{'} \geqslant 0$ et $x_j^{''} \geqslant 0$.

Si une variable n'a pas de contrainte de signe, on la remplace par deux variables positives $x_j^{'}$ et $x_j^{''}$ telles que $x_j = x_j^{'} - x_j^{''}$.

Par exemple :

$$Max\,z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \qquad\qquad Max\,z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3^{'} - 8x_3^{''}$$
$$S.C \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leqslant 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leqslant 17 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \quad S.C \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3^{'} - 4x_3^{''} \leqslant 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3^{'} - 8x_3^{''} \leqslant 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3^{'} + 3x_3^{''} \leqslant 17 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3^{'} \geqslant 0, x_3^{''} \geqslant 0 \end{cases}$$

Si une variable x_j est négative, on la remplace par une variable positive $x_j = -x_j$.

Par exemple :

$$Max\,z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \qquad\qquad Max\,z = 3x_1 - 2x_2 - 8x_3^{'}$$
$$S.C \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leqslant 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leqslant 17 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S.C \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3^{'} \leqslant 8 \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3^{'} \leqslant 25 \\ 9x_1 + 6x_2 + 3x_3^{'} \leqslant 17 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3^{'} \geqslant 0 \end{cases}$$

3^{e} *opération :*

chaque équation $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = d_i$ peut être remplacée par les inéquations :

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant d_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant d_i \end{cases}$$

ou par les inéquations équivalentes :

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant d_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leqslant -d_i \end{cases}$$

Si le programme linéaire a une contrainte d'égalité, on la remplace par deux contraintes équivalentes, l'une d'infériorité, l'autre de supériorité. Les variables du programme doivent satisfaire ces deux contraintes, ce qui revient alors à l'égalité de départ.

Par exemple :

$$\begin{array}{ll} Max\ z = & 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ S.C & \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leqslant 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} Max\ z = & 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ S.C & \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leqslant 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leqslant 17 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geqslant 17 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} Max\ z = & 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ S.C & \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leqslant 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leqslant 17 \\ -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leqslant -17 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

4^e *opération :* Toute inéquation

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant d_i$ (ou $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant d_i$) peut être remplacée par les équations :

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = d_i$ avec $x_{n+i} \geqslant 0$

(ou $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = d_i$ avec $x_{n+i} \geqslant 0$)

x_{n+i} est appelée une variable d'écart qu'on peut introduire dans le problème et qui est affecté d'un coefficient nul dans la fonction à optimiser. Les x_i sont appelés des " variables structurelles ".

Résumé :

- De la forme générale, on peut passer à la forme mixte en procédant par les opérations 1 et 2.
- De la forme mixte et standard à la forme canonique, on procède par l'opération 3.
- De la forme mixte et canonique à la forme standard, on procède par l'opération 4.