حل البرامج الخطية: الطريقة البيانية

1. خطوات حل البرامج الخطية بالطريقة البيانية

بالرغم من إتصاف أسلوب الحل بالطريقة البيانية بالسهولة والوضوح، إلّا أنه يُعتبر مفيداً وصالحاً لحل البرامج الخطية التي تحتوي فقط على متغيرتين.

يتم الحل حسب الطريقة البيانية باتباع الخطوات التالية:

1- تحويل كل متباينات القيود إلى معادلات؛

2- على معلم متعامد يتم رسم الخطوط المستقيمة للمعادلات المتحصل عليها في الخطوة الأولى، ويكفي لذلك أن نحدد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نصل بينهما؛

3- تحديد منطقة الحلول الممكنة: بعد رسم جميع المستقيمات التي تمثل القيود يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة Region of feasible solutions والتي تُسمى بالمنطقة المحدبة Convex set. ومنطقة الحلول الممكنة بالنسبة لمستقيم يُمثل قيد إشارته "أقل من أو يساوي" توجد أسفل المستقيم، في حين أن منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لمستقيم يُمثل قيد إشارته "أكبر من أو يساوي" توجد فوق المستقيم، أما منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لمستقيم يُمثل قيد إشارته "يساوي" فهي تقع على المستقيم نفسه. وفي حالة وجود قيدين أو أكثر، فإن منطقة الحلول الممكنة هي تلك المنطقة التي تُحقق جميع القيود، وهي في الغالب تشكل مضلع متعدد الرؤوس أو الزوايا أو نقاط التطرف Extreme points، وتقع جميعها على تقاطعات المستقيمات الممثلة لمنطقة الحلول الممكنة. ويُمكن لمنطقة الحلول الممكنة أن تكون عبارة عن مستقيم.

إن تحديد منطقة الحلول الممكنة تحدد لنا الحلول التالية:

- الحلول غير الممكنة (Infeasible solution): وهي جميع النقاط خارج منطقة الحلول الممكنة؛

- الحلول الممكنة (Feasible solution): وهي أية نقطة تقع في منطقة الحلول الممكنة؛

- الحلول الأساسية الممكنة (Basic feasible solution): وهي أية نقطة تقع عند أحد زوايا منطقة الحلول الممكنة؛

- الحل الأمثل (Optimal solution): وهي واحدة أو أكثر من الحلول الأساسية الممكنة التي تحقق أعظم قيمة لدالة هدف في حالة التعظيم، أو أدنى قيمة لها في حالة التدنية.

5- إيجاد نقطة الحل الأمثل: يُمكن إستخدام طريقتين لإيجاد نقطة الحل الأمثل:

أ- الطريقة الأولى:

يتم في هذه الطريقة إيجاد نقطة الحل الأمثل باتباع الخطوات التالية:

- تمثيل دالة الهدف على المعلم: نجعل دالة الهدف مساوية للصفر، ونرسم مستقيمها على المعلم، ويكفي لرسم هذا المستقيم أن نحدد نقطة واحدة فقط نظرا لأنه يمر حتما من نقطة المبدأ. ويُطلق على هذا المستقيم بالمستقيم Δ؛

- نحرك المستقيم Δ بصفة متوازية إلى الأعلى إتجاه رؤوس منطقة الحلول الممكنة (حيث أن أحد هذه الرؤوس تمثل نقطة الحل الأمثل)، والنقطة التي تحقق القيمة المثلى لدالة الهدف هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم Δ في حالة التعظيم، وأول نقطة في حالة التدنية.

- عند الوصول إلى نقطة الحل الأمثل، وبعملية الإسقاط، نجد قيم متغيرات البرنامج الخطي. وبتعويض هذه القيم في دالة الهدف نجد قيمة هذه الأخيرة.

ب- الطريقة الثانية:

تعتمد هذه الطريقة على إيجاد الربح أو التكلفة المتحققة حسب الحالة عند كل رأس من رؤوس منطقة الحلول الممكنة، والرأس التي يحقق أعلى ربح أو أقل تكلفة يُعتبر نقطة الحل الأمثل.

فإذا إفترضنا أن منطقة الحلول الممكنة عبارة عن مضلع متكون من أربعة رؤوس A-B-C-D، فيتم حساب الربح أو التكلفة كما يلي:

الرأس أو نقطة التطرف	الإحداثيات (X_1, X_2)	قيمة دالة الهدف (Max. أو Min.)
A	(a_1,a_2)	Z_a
B	(b_2,b_2)	Z_b
C	(c_3,c_3)	Z_c
D	(d_3,d_3)	Z_d

ونقطة الحل الأمثل هي التي تقابل أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم أو أدنى قيمة لها في حالة التدنية.

مثال : ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 6x_1+7x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 12 \\ 2x_1+x_2 \le 8 \\ x1 \ge 0,\ x2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل:

المستقيم 1

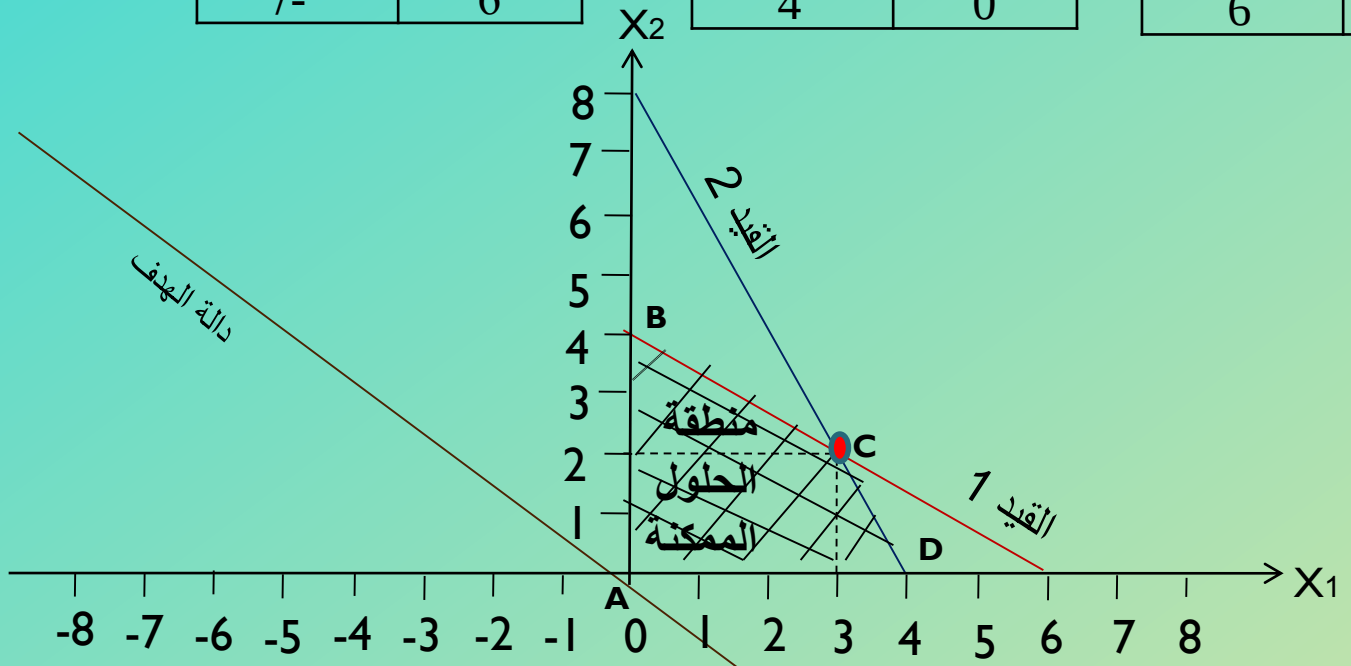
$2x_1+3x_2=12$	
X_1	X_2
0	4
6	0

المستقيم 2

$2x_1+1x_2=8$	
X_1	X_2
0	8
4	0

المستقيم Δ

$6x_1+7x_2=0$	
X_1	X_2
0	0
7-	6



إذا تصل المؤسسة إلى أعظم ربح يُمكن تحقيقيه في ظل الموارد المتوفرة المحدودة (ساعات العمل ورأس المال) عند 32 وحدة نقدية بإنتاج 3 طاولات وكرسيين. ومنه:

$x_1=3$

$x_2=2$

Max Z = 6(3)+7(2)=32 وحدة نقدية

– الطريقة الثانية:

الرأس أو نقطة التطرف	الإحداثيات (X_1, X_2)	قيمة دالة الهدف
A	(0, 0)	0
B	(0, 4)	28
C	(3, 2)	32
D	(4, 0)	24

ومنه فإن نقطة الحل الامثل هي كما يلي:

$x_1=3$

$x_2=2$

Max Z = 32 وحدة نقدية

مثال : ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 6x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

المستقيم 1

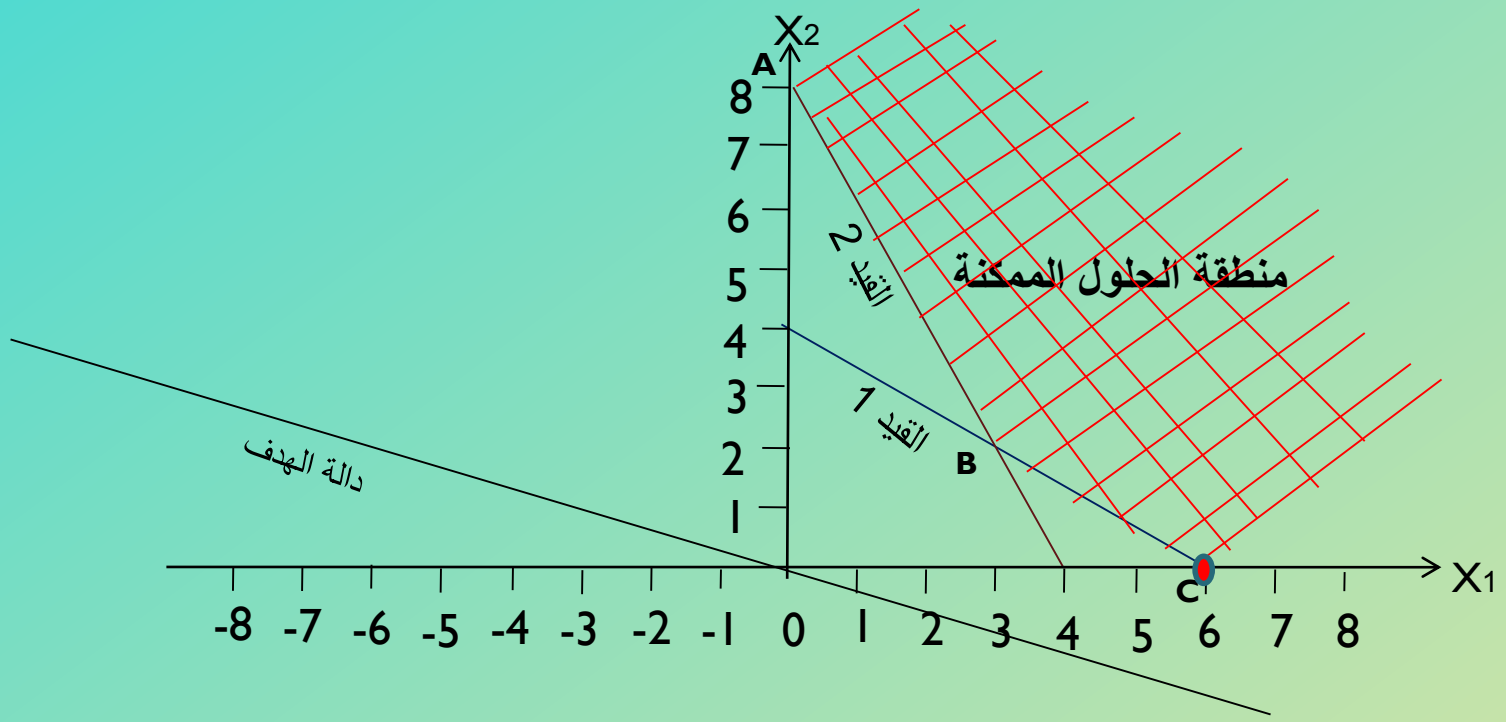
$2x_1+3x_2=12$	
X_1	X_2
0	4
6	0

المستقيم 2

$2x_1+1x_2=8$	
X_1	X_2
0	8
4	0

المستقيم Δ

$2x_1+6x_2=0$	
X_1	X_2
0	0
6-	2



$x_1=6$

$x_2=0$

Min Z = 2(6)+6(0)=12 وحدة نقدية

وهي أدنى تكلفة يُمكن تحقيقيها.

– الطريقة الثانية:

الرأس أو نقطة التطرف	الإحداثيات (X_1, X_2)	قيمة دالة الهدف
A	(0, 8)	48
B	(3, 2)	32
C	(6, 0)	12

ومنه فإن نقطة الحل الامثل هي كما يلي:

$X_1 = 6$

$X_2 = 0$

Min Z = 12 وحدة نقدية

2.حالات خاصة

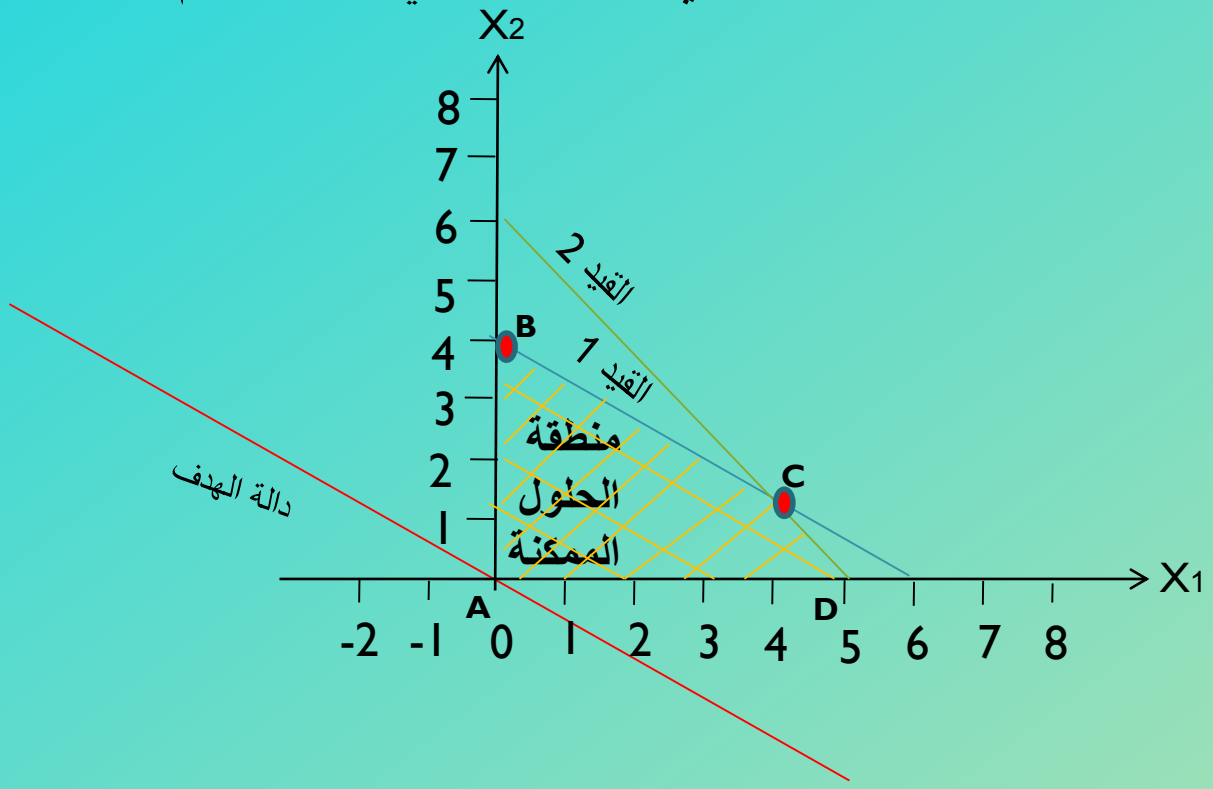
عند حل البرامج الخطية بالطريقة البيانية تواجهنا في بعض الأحيان العديد من الحالات غير العادية:

حالة تعدد الحلول: تحدث هذه الحالة عند تحريك مستقيم Δ نحو الأعلى ونصل إلى رأسين على الأقل في آن واحد، بحيث يكونا آخر رأسين في حالة التعظيم، أو أول رأسين في حالة التدنية. وينبغي الإشارة إلى أن الوصول إلى رأسين على الأقل في نفس الوقت لا يعني أن عدد الحلول هو بعدد الرؤوس، بل إننا أمام حالة مالانهائية الحلول، حيث إن كل نقطة من النقاط على المستقيم الرابط بين هذه الرؤوس تعطينا قيم مختلفة للمتغيرات، لكنها كلها تعطينا نفس قيمة دالة الهدف.

وباستخدام الطريقة الثانية في الحل بالطريقة البيانية، فإننا نقع أمام حالة تعدد الحلول عندما نعوض إحداثيات النقاط على المستقيم الرابط بين الرأسين على الأقل الذين يصلاهما مستقيم Δ في آن واحد في دالة الهدف وتعطينا كلها نفس القيمة الكبرى في حالة التعظيم أو نفس القيمة الصغرى في حالة التقليل.

مثال:

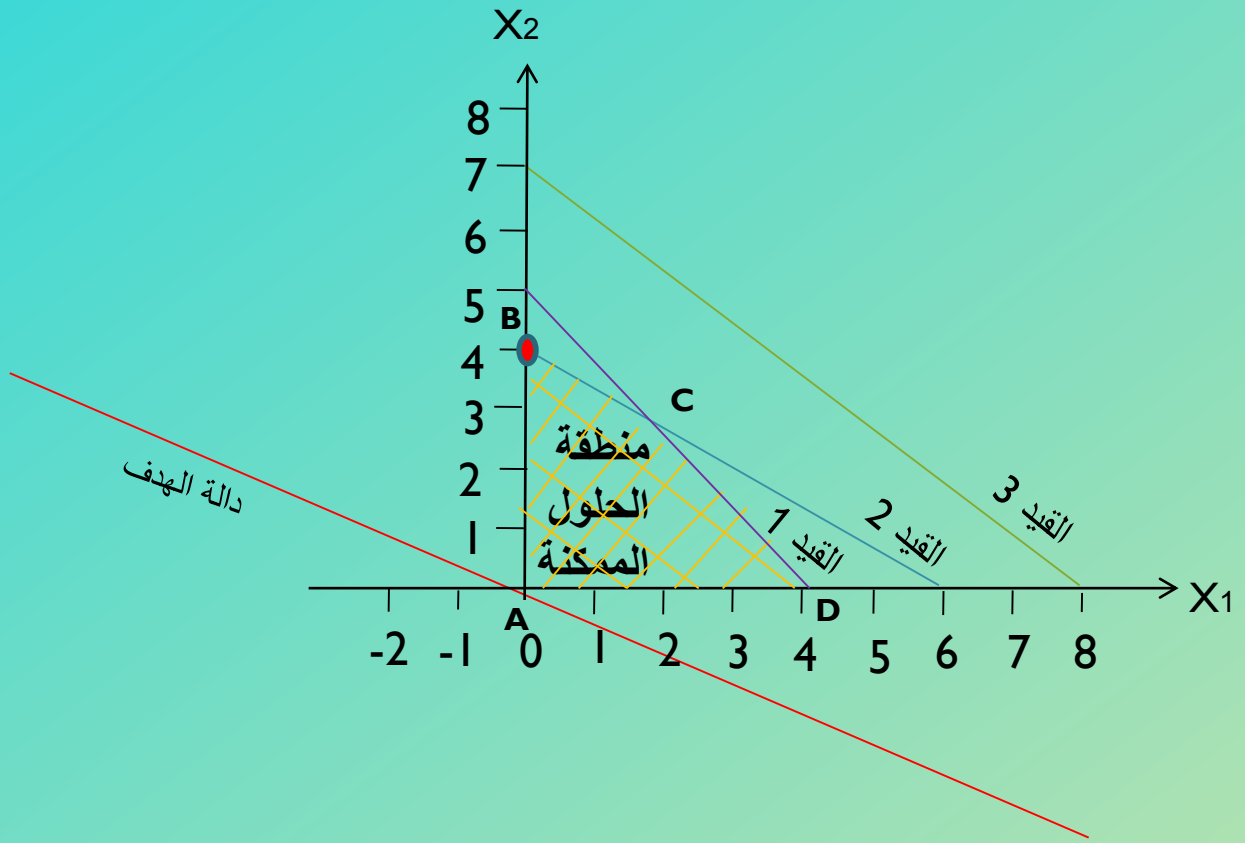
على افتراض انه لدينا برنامج خطي متكون من قيدين أقل من أو يساوي ودالة الهدف في حالة التعظيم:



حالة القيود الفائضة (الحيادية): وتتمثل هذه الحالة في إمكانية وجود قيد (أو أكثر) لا يؤثر في تحديد منطقة الحلول الممكنة، ويُسمى في هذه الحالة بـ "قيد فائض أو حيادي".

مثال:

على إفتراض انه لدينا برنامج خطي متكون من ثلاثة قيود أقل من أو يساوي ودالة الهدف في حالة التعظيم:

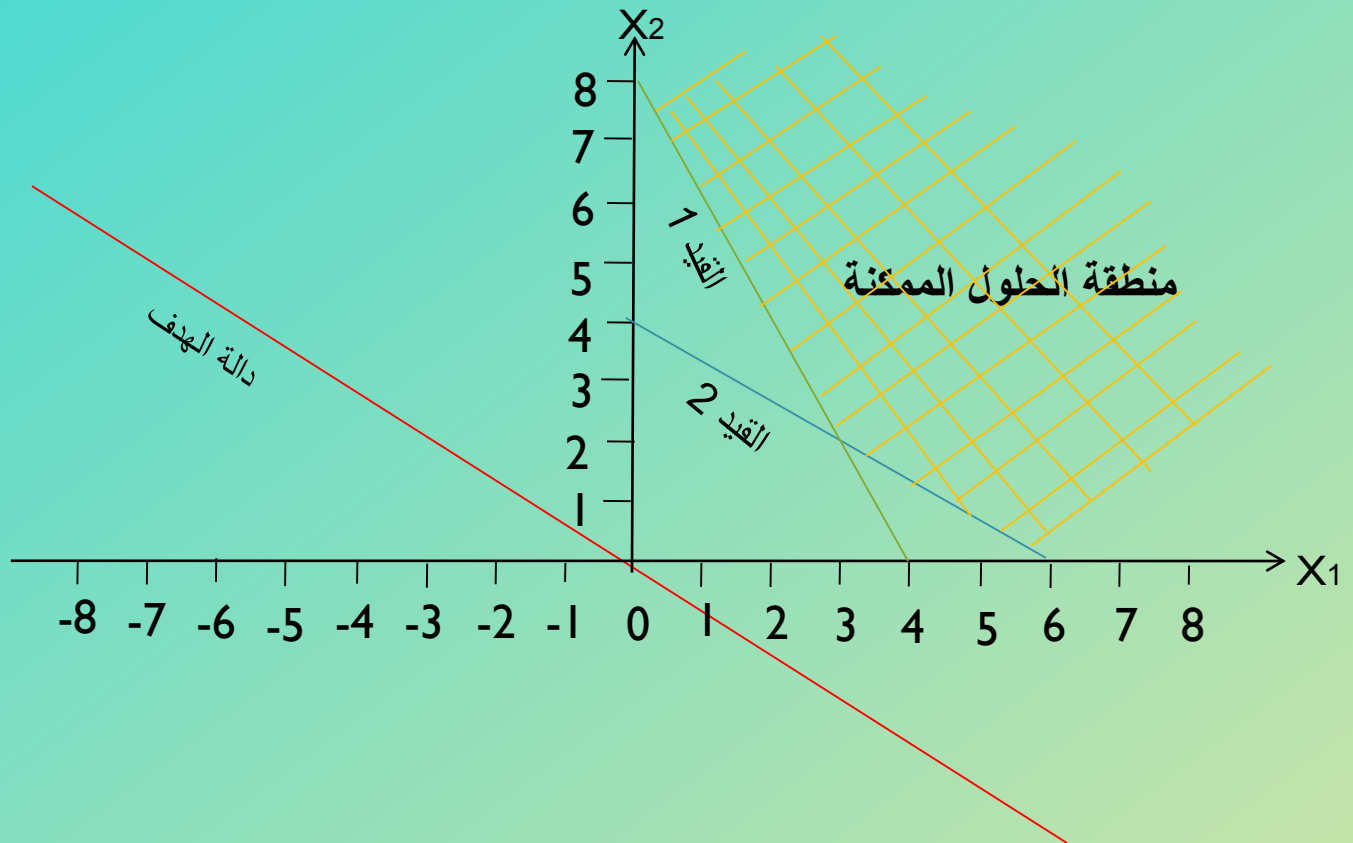


يُلاحظ أن القيد رقم 3 هو قيد فائض أو حيادي، حيث أنه لا يؤثر على منطقة الحل الممكنة، وحذف هذا القيد سوف لن يغير من نقطة الحل الأمثل.

لا نهائية الدالة الاقتصادية: تحدث مثل هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول مفتوحة، كما يُمكن أن تحدث سواء كانت دالة الهدف في حالة التعظيم أو التقليل.

مثال:

على افتراض انه لدينا برنامج خطي متكون من قيدين اكبر من أو تساوي ودالة الهدف في حالة التعظيم :



- **حالة استحالة الحل:** هي الحالة التي تكون فيها القيود متناقضة، حيث لا تتحقق لنا أي منطقة للحل الأمثل.

مثال:

على افتراض انه لدينا برنامج خطي متكون من قيدين احدهما اكبر من أو تساوي والأخر اصغر من أو تساوي ودالة الهدف في حالة التعظيم او التدنية: