CENTRE UNIVERSITAIRE ABDELHAFID BOUSSOUF - MILA
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT de MATHÉMATIQUES

EXERCICES D'ANALYSE NUMÉRIQUE

EXERCICE N° 1 :

Trouver le polynôme P_2 qui réalise la meilleure approximation au sens des moindres carrés de la fonction $f(x) = |3x - 5|$ sur l'intervalle $[-1; 2]$ en prenant $\omega(x) = 1$.

EXERCICE N° 2 :

Soit donnés les points suivants $(0; 2)$,$(1; 1)$,$(2; 2)$,$(3; 3)$.

1. Déterminer le polynôme $P_n(x)$ de Lagrange (dont on précisera le degré) qui interpole la fonction passant par ces points.
2. Utiliser le polynôme de Newton qui interpole la fonction passant par ces points.
3. Comparer les résultats trouvés aux questions précédentes.

EXERCICE N° 3 :

1. Construire le polynôme de Lagrange L qui interpole les points $(-1; 1), (0; 1), (1; 2), (2; 3)$.
2. Soit Q le polynôme qui interpole les points $(-1; 1), (0; 1), (1; 2)$. Montrer qu'il existe un nombre réel α tel que :

$$L(x) - Q(x) = \alpha(x + 1)x(x - 1).$$

EXERCICE N° 4 :

1. Construire le polynôme d'interpolation de Newton de la fonction $y = f(x)$ donnée par le tableau ci-dessous :

x	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0
$f(x)$	3.0	-1.0	3.0	-4.0	0.0

2. Trouver à l'aide de ce polynôme $f(3.5)$.
3. l'erreur commise.

EXERCICE N° 5 :

Calculer le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ de Lagrange de la fonction $f(x) = x(x^2 - 1)$ au point $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

EXERCICE N° 6 :

Etant donnés les réels suivants : x_2,α_1,α_2,α_3,α_4,α_5.

On considère le tableau des différences divisées suivant :

x	$f(x)$	*DIFFÉRENCES DIVISÉES* Diff. d'ordre 1	*DIFFÉRENCES DIVISÉES* Diff. d'ordre 2
$x_1 = 0$	1		
		1	
x_2	-1		α_4
		α_2	
$x_3 = -1$	0		α_5
		α_3	
$x_4 = 2$	α_1		

1. Calculer x_2,α_1,α_2,α_3,α_4 et α_5.
2. Donner le polynôme d'interpolation de Newton qui interpole les points $(0, 1)$, $(x_2, -1)$, $(-1, 0)$ et $(2, \alpha_1)$.

EXERCICE N° 7 :

Soit f une fonction possédant $(n + 2)$ dérivées continues dans l'intervalle $[a, b]$, l'erreur d'interpolation polynomiale en $(n + 1)$ points est donnée par :

$\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_{n+1})f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

1. Calculer $\epsilon'_n(x)$;
2. Donner une évaluation de $\epsilon'_n(x)$ en un point d'interpolation x_k;
3. Pour $n = 1, x_1 = a, x_2 = a + h$, calculer $p'_1(a)$ et $\epsilon'_1(a)$;
4. Pour $n = 2, x_1 = a, x_2 = a + h, x_3 = a + 2h$, calculer $p'_2(a)$ et $\epsilon'_2(a)$.

EXERCICE N° 8 :

Calculer $y'(0, 97)$ de la fonction $y = f(x)$ donnée par le tableau suivant :

x	$0,96$	$0,98$	$1,00$	$1,02$	$1,04$
y	$0,7825361$	$0,7739332$	$0,7651977$	$0,7563321$	$0,7473390$

EXERCICE N° 9 :

Calculer $y'(50)$ et $y''(50)$ de la fonction $y = \log(x)$ donnée par le tableau suivant :

x	50	55	60	65
y	$1,6990$	$1,7404$	$1,7782$	$1,8129$

EXERCICE N° 10 :

(1) Soit $f(x) = e^x$, on donne le tableau suivant :

x	$0,4$	$0,6$	$0,7$	$1,0$
y	$1,491825$	$1,822119$	$2,013753$	$2,718282$

(2) Calculer $f'(0,8)$ et donner une majoration de l'erreur.

(3) Calculer $f''(0,8)$ et donner une majoration de l'erreur.

EXERCICE N° 11 :

1. Calculer par la formule des trapèzes et ensuite par la formule de Simpson (en prenant h=0,2).

   l'intégrale suivante :

$$\int_0^2 (x^2 + 5x + 2)dx \tag{1}$$

2. Quelle estimation est la plus précise.

EXERCICE N° 12 :

Soit $h = 0,5$.

1. Calculer par la formule des trapèzes, l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} (2 + x)^{\frac{1}{2}} dx$$

2. Estimer l'erreur commise.
3. Par la formule de quadrature de Gauss à trois ordonnées.
4. Estimer l'erreur commise.

EXERCICE N° 13 :

On considère la fonction donnée par le tableau suivant :

x	0	1/2	1	3/2	2	5/2
$f(x)$	3/2	2	2	1,6364	1,2500	0,9565

1. Calculer par la formule des trapèzes, l'intégrale :

$$\int_0^{5/2} f(x)dx$$

2. Estimer l'erreur commise.

EXERCICE N° 14 :

Soit le système donné par (5)

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 7 \\ 2x+4y+2z &= 10 \\ 3x+2y+z &= 9 \end{cases} \tag{2}$$

Résoudre le système (5) par la méthode de Gauss.

EXERCICE N° 15 :

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 14 \end{pmatrix} \tag{3}$$

1. Montrer que A est symétrique, définie positive
2. Trouver une matrice triangulaire inférieure L tel que $A = LL^T$
3. Résoudre $Ax = B$ où $B = (24, -6, 15)T$ par la méthode de Choleski.

EXERCICE N° 16 :

Résoudre graphiquement l'équation cubique :

$$x^3 - 1,75x + 0,75 = 0$$

EXERCICE N° 17 :

Utiliser l'algorithme de dichotomie pour calculer à $0,01$ près la racine de :

$$f(x) = e^x \sin x - 1$$

dans l'intervalle $[0, \pi/2]$.

EXERCICE N° 18 :

1. Soit f une fonction possédant 4 dérivées continues dans l'intervalle $[0,5]$, donner une évaluation de $\int\limits_0^5 f(x)dx$ sachant que $x_1 = 1$; $x_2 = 2$ et $x_3 = 4$.
2. Soit g une fonction possédant 2 dérivées continues dans l'intervalle $[0,2]$, donner une évaluation de $\int\limits_0^2 (x-1)g(x)dx$ sachant que $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

EXERCICE N° 19 :

1. Dans l'intervalle $[a,b]$ on prend $x_1 = a$, $x_2 = a + h = b$, $f \in C^2[a,b]$, évaluer la formule des trapèzes $\int\limits_a^b f(x)dx$.
2. On prend $x_1 = a$, $x_2 = a + h$, $x_3 = a + 2h, \ldots.x_{n+1} = a + nh = b$, retrouver la formule des trapèzes généralisée.
3. Déduire la valeur approximative de l'intégrale
$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$$
pour $n = 6$.
4. Calculer la valeur exacte de cette intégrale et déterminer les erreurs absolues et relatives.

EXERCICE N° 20 :

On suppose que f est une fonction 3 fois continument dérivable dans $[-h,h]$ et $f^{(4)}(x)$ continue dans cet intervalle, f est donnée aux points : $x_1 = -h$, $x_2 = 0$, $x_3 = h$.

1. Etablir la formule suivante :
$$\begin{aligned}\int\limits_{-h}^{x} f(t)dt &= \frac{2x^3 - 3hx^2 + 5h^3}{12h^2} f(-h) - \frac{x^3 - 3h^2x - 2h^3}{3h^2} f(0) + \\ &\quad + \frac{2x^3 + 3hx^2 - h^3}{12h^2} f(h) + \varepsilon(x)\end{aligned}$$
On donnera une expression de $\varepsilon(x)$.
2. On suppose que $x \in [-h,x]$:

a) Montrer que $\varepsilon(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$$\varepsilon(x) = \frac{1}{24}(x^2 - h^2)^2 f^{(3)}(\zeta),$$
avec $\zeta \in [-h,h]$.

b) Utiliser le résultat précédent pour donner une valeur approchée de :

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} \frac{dt}{1+t}$$

Quelle est la précision obtenue ?

Comparer ce résultat à celui que donnerait la formule des trapèzes utilisant les points $x_1 = -\frac{1}{4}$ et $x_2 = 0$.

EXERCICE N° 21 :

Déduire la formule de Gauss de la fonction f sur l'intervalle $[-1, 1]$ pour le cas de trois ordonnées, on prendra pour la fonction poids $\omega(x) = 1$.

EXERCICE N° 22 :

1. En utilisant la formule de Gauss à trois ordonnées, calculer l'intégrale :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

2. En déduire $\int_{0}^{1} \sqrt{1+2x}\ dx$.

EXERCICE N° 23 :

En utilisant une méthode convergeante de la forme $x_{n+1} = F(x_n)$, trouver la racine à $0,01$ près de :

$$f(x) = xe^x - 1$$

dans l'intervalle $[1/2, 1]$.

EXERCICE N° 24 :

En utilisant la méthode de Newton, chercher la racine à $0,001$ près de l'équation :

$$f(x) = x^4 + x^2 + 2x - 1 = 0$$

dans l'intervalle $[0, 1]$.

EXERCICE N° 25 :

Trouver par la méthode de Newton, la racine positive minimale de l'équation :

$$\tan x = x$$

à $0,0001$ près.

EXERCICE N° 26 :

On considère l'équation

$$\frac{e^{x-2}}{x} - 1 \tag{4}$$

1. Localiser les racines de l'équation (4) dans des intervalles de la forme $[A, A+1]$.
2. Trouver par la méthode de Newton, la plus grande racine à 0,001 prés de l'équation (4).

EXERCICE N° 27 :

On considère la fonction f donnée par :

$$f(x) = x^5 - x - 0,2$$

En utilisant la méthode de **Newton**, calculer la racine positive de l'équation $f(x) = 0$ à $0,0005$ près.

EXERCICE N° 28 :

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 6 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = & -10 \\ 2x_1 - 4x_2 + 11x_3 & = & 27 \end{cases}$$

1. Montrer que la matrice du système est symètrique, définie, positive.
2. Résoudre le système par la méthode de **Choleski**

EXERCICE N° 29 :

Soit la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 20 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est symétrique, définie positive.

2. Résoudre par la méthode de **Cholesky** le système donné par :
   $AX = B$ avec $B = (2, 4, 0, 0)^T$.
3. On note $L = (l_{ij})$, calculer $\det A$ par la méthode de Choleski.

EXERCICE N° 30 :

Soit le système :

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 & = & 9 \\ x_1 + 9x_2 - 6x_3 & = & 1 \\ -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 & = & 6 \end{cases} \tag{5}$$

Résoudre le système (5) par la méthode **de relaxation**.

EXERCICE N° 31 :

Soit la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Résoudre par la méthode de **Seidel** le système donné par :
$Ax = B$ avec $B = (12; -1; 5)^T$ en partant de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.