Cours de la matière : Théorie des graphes
Pour les étudiants de la troisième année Licence Mathématiques Appliquée
Département de mathématiques
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila
Anné universitaire 2024/2025

Introduction + Chapitre 1, Notions fondamentales de la théorie des graphes

Table des matières

Introduction

La recherche opérationnelle regroupe un ensemble de méthodes visant à optimiser la prise de décision dans des situations complexes. Elle permet de modéliser des problèmes issus du monde réel, d'identifier les approches de résolution les plus adaptées et d'exploiter les outils pertinents pour proposer des solutions efficaces. En tant que discipline appartenant à l'aide à la décision, elle fournit aux décideurs des techniques leur permettant d'opter pour les meilleures stratégies possibles. Comme toute théorie en constante évolution, la recherche opérationnelle ne cesse d'étendre son champ d'application à divers domaines. Certains problèmes de décision impliquent la prise en compte de plusieurs objectifs, nécessitant ainsi une analyse multicritère afin de sélectionner la solution la plus appropriée.

Parmi les outils fondamentaux de la recherche opérationnelle, la théorie des graphes joue un rôle central. En représentant des ensembles d'objets et leurs relations sous forme de graphes, elle permet d'aborder des problèmes d'optimisation majeurs tels que la recherche de chemins optimaux, l'ordonnancement des tâches, ainsi que l'étude des concepts de couverture et de domination dans les réseaux. Cette branche des mathématiques trouve des applications variées, notamment en logistique, en informatique, en télécommunications et dans le domaine des transports.

L'histoire de la théorie des graphes remonte au XVIII siècle avec les travaux de Leonhard Euler, notamment son célèbre problème des ponts de Königsberg : les habitants de la ville cherchaient à déterminer s'il était possible de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et revenir au point de départ. D'autres problèmes historiques, tels que la marche du cavalier sur l'échiquier ou le coloriage des cartes, ont également contribué à l'émergence de cette discipline.

Depuis son origine, la théorie des graphes a connu un développement considérable et s'est étendue à diverses disciplines telles que la chimie, la biologie et les sciences sociales. Dès le début du XX siècle, elle s'est imposée comme une branche à part entière des mathématiques, notamment grâce aux contributions de Konig, Menger, Cayley, Berge et Erdos.

De manière générale, un graphe permet de modéliser la structure et les connexions d'un système complexe en mettant en évidence les relations entre ses éléments. Il constitue un outil puissant pour représenter des réseaux de communication, des réseaux sociaux, des infrastructures routières, des interactions entre espèces en biologie, ou encore des circuits électriques. Aujourd'hui, la théorie des graphes demeure un domaine de recherche actif, mobilisant aussi bien des mathématiciens que des spécialistes de l'algorithmique, en raison de son importance dans la résolution de problèmes combinatoires et computationnels.

1

Notions fondamentales de la théorie des graphes

Dans cette section nous présentons la terminilogie et quelques notions de base de la thèorie des graphes.

1.1 Terminologie et définitions générales

Concepts de graphes

Un *graphe* est un couple $G = (V, E)$ où :

- V est un ensemble fini non vide appelé ensemble des *sommets* (ou *nœuds*).
- $E \subseteq V \times V$ est un ensemble d'arêtes (ou arcs) reliant les sommets.

Si les arêtes sont des couples ordonnés, alors le graphe est dit *orienté* (ou *digraphe*). Sinon, il est dit *non orienté*.

Graphe simple
Un graphe G est dit simple s'il ne comporte pas de boucle, et si chaque paire de sommets v_i et v_j sont relié par au plus une arête .

Graphe trivial :
Un graphe trivial est un graphe qui contient un seul ou aucun sommet.

Graphe orienté et graphe non orienté

Un **graphe orienté** $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles : un ensemble fini de sommets V et un ensemble fini d'arcs E. Si $e = (v_i, v_j)$ est un arc du graphe G, alors v_i est l'extrémité initiale de e et v_j est l'extrémité finale de e.

Un **graphe non orienté** $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles : un ensemble fini et non vide de sommets V et un ensemble fini d'arêtes E. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v), notée $e = uv$, où u et v sont les extrémités de e. Dans ce cas, on dit que u et v sont *adjacents* et que l'arête (u, v) est *incidente* à u et à v.
Un sommet est dit *isolé* s'il n'est adjacent à aucun autre sommet de G.

Voisinage
Le voisinage ouvert d'un sommet v, noté $N(v)$ est l'ensemble de sommets adjacents à v.
Le voisinage fermé d'un sommet v, noté $N[v]$ est l'ensemble $N[v] = N(v) \bigcup \{v\}$.

Degré d'un sommet
Le degré d'un sommet v, noté $d_G(v)$ est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

Degré d'un graphe
Le degré d'un graphe est le degré maximum $\Delta(G)$ ou minimum $\delta(G)$ sur tous ses sommets.

Ordre d'un graphe

L'ordre d'un graphe G est le nombre de sommets de ce graphe.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier. Si le degré commun est k, alors on dit que le graphe est k-régulier.

Théorème 1.1 *(Lemme des poignées de mains) La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

1.2 Graphes particuliers

Sous-graphe et graphe partiel Un graphe $H = (V(H), E(H))$ est un *sous-graphe* de $G = (V(G), E(G))$ si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Pour un ensemble de sommets $S \subset V(G)$, le *sous graphe de G induit* par S est le graphe noté $G[S]$ ayant S pour ensemble de sommets, les arêtes de $G[S]$ sont celles de $E(G)$ dont les deux extrémités sont dans S. Le graphe $G^{'} = (V,E^{'})$ est un graphe partiel de G, si $E^{'}$ est inclus dans E. Autrement dit, on obtient $G^{'}$ en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G.

Chaîne Une *chaîne P_n* dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets x_1, x_2,. . ., x_n

telle que pour tout entier i, $1 \leq i \leq n-1$, e_i=$x_ix_{i+1} \in E$.

L'entier $n-1$ représente la *longueur* de P_n et les sommets x_1 et x_n sont appelés *extrémité initiale* et *extrémité finale* respectivement de la chaîne P_n.

Une chaîne est dite *élémentaire* si tous ses sommets sont distincts.

Une chaîne est dite simple si toutes ses arêtes sont distinctes.

Exemple 1.1 *Le graphe illustré dans FIG.1.1-(a) représente la chaîne simple élémentaire mais dans FIG.1.1-(b), la chaîne est simple mais non élémentaire.*

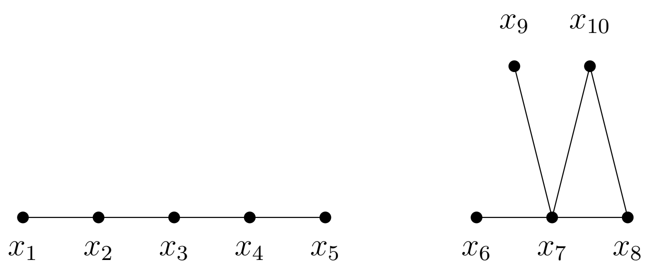

FIGURE 1.1 – (a) La chaîne x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 est simple et élémentaire-(b) La chaîne x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_7, x_9 est simple mais non élémentaire

Chemin dans un graphe orienté Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arcs. Un *chemin* de longueur k dans G est une suite ordonnée de sommets

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$$

telle que $\forall i \in \{0, \ldots, k-1\}$, il existe un arc $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Si tous les sommets $v_0, v_1, \ldots, v_k$ sont distincts, alors le chemin est dit *simple*.

Un chemin est *élémentaire* si aucun sommet, sauf peut-être le premier et le dernier, n'apparaît plus d'une fois.

Graphe connexe et graphe non connexe

Un graphe non orienté est connexe s'il est possible à partir de n'importe quel sommet de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes. Autrement dit, Un *graphe connexe non orienté* est un graphe $G = (V, E)$ tel que pour chaque paire de sommets $u, v \in V$, il existe une chaine simple entre u et v composé uniquement d'arêtes non orientées. Autrement dit, un graphe est connexe si, pour chaque couple de sommets u et v, il existe une suite d'arêtes reliant u à v, sans tenir compte de la direction des arêtes.

Un graphe orienté $G = (V, E)$ est dit *fortement connexe* si pour chaque paire de sommets $u, v \in V$, il existe un chemin dirigé de u à v et un chemin dirigé de v à u. Autrement dit, pour tous les sommets u et v, il existe un chemin dirigé de u vers v et un chemin dirigé de v vers u.

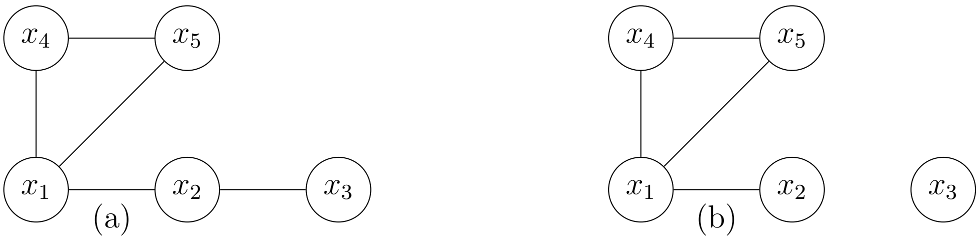

FIGURE 1.2 – (a) Un graphe connexe-(b) un graphe non connexe

Réflexivité Un graphe est dit **réflexif** si, pour tout sommet u, l'arête (u, u) appartient à l'ensemble des arêtes. Formellement, un graphe $G = (V, E)$ est réflexif si :

$$\forall u \in V, \quad (u, u) \in E.$$

Symétrie Un graphe est dit **symétrique** si, pour toute arête (u, v), l'arête opposée (v, u) est aussi présente dans le graphe. Formellement, $G = (V, E)$ est symétrique si :

$$\forall (u, v) \in E, \quad (v, u) \in E.$$

Antisymétrie Un graphe est dit **antisymétrique** si, pour toute paire d'arêtes (u, v) et (v, u), on a nécessairement $u = v$. Autrement dit, si $(u, v) \in E$ et $(v, u) \in E$, alors $u = v$.

Formellement, $G = (V, E)$ est antisymétrique si :

$$\forall (u, v) \in E, \quad (v, u) \in E \Rightarrow u = v.$$

Corde Une *corde* est une arête qui relie deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une *chaîne minimale induite* par n sommets, notée par P_n, est une chaîne élémentaire sans corde.

Cycle Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues.
Un *cycle élémentaire* C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. Le graphe illustré dans la figure FIG.1.3 représente le cycle d'ordre 5 $C_5 = x_1$, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1.

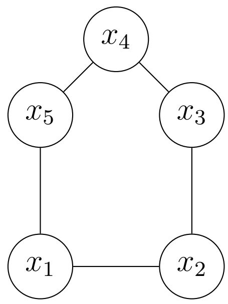

FIGURE 1.3 – Le cycle $C_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1\}$

Circuit dans un Graphe Orienté

Un **circuit** dans un graphe orienté $G = (V, E)$ est un chemin $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tel que :
- $v_1 = v_k$ (le chemin est fermé),
- tous les sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ sont distincts,
- $\forall i \in \{1, \ldots, k-1\}, (v_i, v_{i+1}) \in E$.

Autrement dit, un circuit est un chemin orienté fermé qui ne repasse par aucun sommet (sauf le premier et le dernier qui coïncident).
Graphe triangulé Un graphe est dit triangulé si chacun de ses cycles de nombre d'arêtes A tel que $\mid A \mid \geq 4$ possède une corde c'est à dire si chacun de ses cycles de G est d'ordre inférieure ou égale 3 .

Exercice 1.1 *Chercher les différentes propriétés d'un graphe triangulé. Un travail à remettre sous forme d'un rapport.*

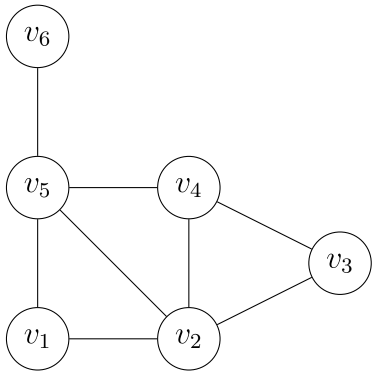

FIGURE 1.4 – Graphe triangulé

Clique et stable Une clique K dans un graphe G est un ensemble de sommets deux à deux adjacents tel que $G[K]$ est un graphe complet. Un stable S dans un graphe G est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents tel que $G[S]$ est un graphe sans arêtes. Le cardinal du plus grand stable est le nombre de stabilité de G, on le note $\alpha(G)$.

FIGURE 1.5 – (a) Un stable maximal et (b) Un stable maximum

Exercice 1.2 *Calculer le nombre de stabilité pour une chaine et un cycle d'ordre n.*

Complémentaire d'un graphe Le complémentaire d'un graphe G est le graphe noté $\bar{G}$ défini par : $V_{\bar{G}} = V_G$ et l'arête $uv(u \neq v) \in E_{\bar{G}}$ si et seulement si $uv \notin E_G$.

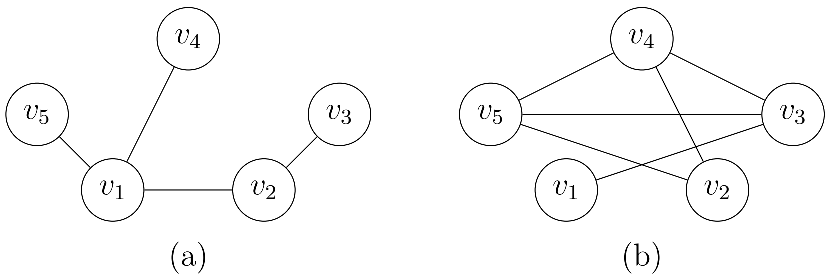

FIGURE 1.6 – Le Graphe (a) et son complémentaire (b)

Graphe complet Un graphe simple est dit complet si toute paire de sommets de G est reliée par une arête.

Exemple 1.2 *Le graphe K_5 illustré dans FIG.1.7 est un graphe complet à 5 sommets.*

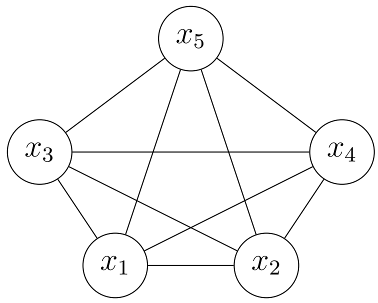

FIGURE 1.7 – Le graphe complet K_5

Graphe biparti Un graphe est dit *biparti* s'il est possible de partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous ensembles V_1 et V_2 tels que les sous graphes induits par V_1 (resp.V_2) ne contient aucune arête.
Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle de longueur impair.
Un graphe est dit *biparti complet*, et est noté $K_{m,n}$, si $|V_1|=m$ et $|V_2|=n$ et tout sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2.

Exemple 1.3 *Le graphe illustré dans FIG.1.8 représente le graphe biparti complet $K_{3,2}$*

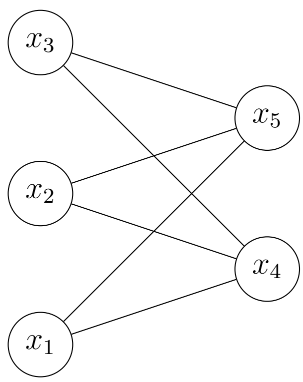

FIGURE 1.8 – Le graphe biparti complet $K_{3,2}$

Isomorphisme de Graphes Deux graphes $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ sont dits **isomorphes** s'il existe une bijection

$$f : V_G \to V_H$$

telle que pour tous $u, v \in V_G$, on a :

$$(u, v) \in E_G \iff (f(u), f(v)) \in E_H.$$

Autrement dit, un isomorphisme de graphes est une correspondance entre les sommets de G et H qui préserve les arêtes.

Dans ce cas, on note $G \simeq H$.

Exercice 1.3 ***Vérification de l'Isomorphisme de Graphes***

Soient les graphes G_1 et G_2 définis par :

$$G_1 = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (a, c)\})$$

$$G_2 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (1, 3)\})$$

Montrer que G_1 et G_2 sont isomorphes et donner une bijection entre leurs sommets.

Solution : On définit l'application suivante :

$$f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}, \quad f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 3, \quad f(d) = 4.$$

On vérifie que cette bijection préserve les arêtes :

$$(a, b) \mapsto (1, 2), \quad (b, c) \mapsto (2, 3), \quad (c, d) \mapsto (3, 4), \quad (d, a) \mapsto (4, 1), \quad (a, c) \mapsto (1, 3).$$

Comme toutes les arêtes sont préservées, $G_1 \simeq G_2$.

Fermeture Transitive d'un Graphe Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. La **fermeture transitive** de G, notée $G^+ = (V, E^+)$, est le graphe obtenu en ajoutant à G toutes les arêtes nécessaires pour garantir que, si un chemin existe entre deux sommets, alors une arête directe les relie. Formellement, E^+ est défini comme :

$$E^+ = \{(u, v) \mid \text{il existe un chemin de } u \text{ à } v \text{ dans } G\}.$$

Autrement dit, la fermeture transitive de G est le plus petit sur-graphe transitif de G, c'est-à-dire le plus petit graphe contenant G tel que :

$$\forall u, v, w \in V, \quad (u, v) \in E^+ \text{ et } (v, w) \in E^+ \Rightarrow (u, w) \in E^+.$$

Exercice 1.4 ***Fermeture Transitive d'un Graphe***

Soit le graphe orienté G défini par :

$$V = \{A, B, C, D\}, \quad E = \{(A, B), (B, C), (C, D)\}.$$

Déterminer sa fermeture transitive G^+.

Solution : On ajoute les arêtes transitives :

$$(A, C) \text{ car } (A, B) \text{ et } (B, C) \in E.$$

$$(B, D) \text{ car } (B, C) \text{ et } (C, D) \in E.$$

$$(A, D) \text{ car } (A, B), (B, C), (C, D) \in E.$$

Ainsi, la fermeture transitive est :

$$E^+ = \{(A, B), (B, C), (C, D), (A, C), (B, D), (A, D)\}.$$

Graphes eulériens On appelle cycle eulérien d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G. Un graphe est dit eulérien s'il possède un cycle eulérien. On appelle chaîne eulérienne d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G. Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est semi- eulérien. Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

Théorème 1.2 *(Théorème d'Euler (1736)) Un graphe connexe est eulérien si et seulement si chacun de ses sommets est incident à un nombre pair d'arêtes.*

Si exactement deux sommets s et t sont incidents à un nombre impair d'arêtes, le graphe est dit semi-eulérien.

Graphes hamiltoniens On appelle cycle hamiltonien d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de G. Un graphe est dit hamiltonien s'il possède un cycle hamilto- nien. On appelle chaîne hamiltonienne d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets de G. Un graphe ne possédant que des chaînes hamiltoniennes est semi-hamiltonien. Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes (semi-)hamiltoniens. On peut énoncer quelques propriétés et conditions suffsantes :

— un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien ;
— – si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien ;
— – les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Théorème 1.3 *(Ore)*

Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) > n$, alors G est hamiltonien.

Corollaire 1.1 *(Dirac) Soit G un graphe simple d'ordre n ¿ 3. Si pour tout sommet x de G, on a $d(x) > \frac{n}{2}$, alors G est hamiltonien.*

Exercice 1.5 *Soit G un graphe non orienté connexe défini par l'ensemble des sommets $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ et l'ensemble des arêtes*

$$E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, F\}, \{E, F\}\}.$$

1. *Déterminer si G est un graphe eulérien.*
2. *Déterminer si G est un graphe hamiltonien.*

Solution

Vérification du caractère eulérien Un graphe est eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

Calculons les degrés des sommets :

Sommet	Degré
A	3
B	3
C	4
D	3
E	3
F	2

On constate que les sommets A, B, D, E ont un degré impair.

Le graphe n'est donc pas eulérien car il possède plus de deux sommets de degré impair.

Vérification du caractère hamiltonien Un graphe est hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien, c'est-à-dire un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet.

Nous utilisons le critère de Dirac : un graphe connexe avec n sommets est hamiltonien si tous ses sommets vérifient $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$. Ici, $n = 6$, donc tous les sommets devraient avoir un degré d'au moins 3.

Tous les sommets vérifient cette condition, mais ce critère ne garantit pas toujours l'existence d'un cycle hamiltonien.

On essaie de trouver un cycle hamiltonien :

$$A - B - E - F - D - C - A$$

Ce cycle passe bien par tous les sommets une seule fois avant de revenir au point de départ, donc G est hamiltonien.

Graphe Sans Circuit

Un graphe orienté $G = (V, E)$ est dit **sans circuit** (ou acyclique) si aucun circuit n'existe dans G. Formellement, G est acyclique si et seulement s'il n'existe pas de séquence de sommets $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ avec $k \geq 2$ telle que :

$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1) \in E.$$

Un graphe orienté sans circuit est appelé un **graphe orienté acyclique** (DAG : Directed Acyclic Graph).

Exercice 1.6 ***Détection de Circuits*** *Considérons le graphe orienté suivant :*

$$V = \{X, Y, Z\}, \quad E = \{(X, Y), (Y, Z), (Z, X)\}.$$

Montrer que ce graphe contient un circuit.

Solution : On observe que :

$$X \to Y, \quad Y \to Z, \quad Z \to X.$$

Ce qui forme un chemin fermé $X \to Y \to Z \to X$, donc un circuit. Ainsi, le graphe n'est pas acyclique.

Noyau d'un Graphe Orienté Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. Un sous-ensemble $N \subseteq V$ est appelé un **noyau** de G si :

- **Indépendance** : Pour tous $u, v \in N$, avec $u \neq v$, on a $(u, v) \notin E$, c'est-à-dire qu'aucune arête orientée ne relie deux sommets de N.
- **Absorption** : Pour tout sommet $w \in V \setminus N$, il existe un sommet $v \in N$ tel que $(w, v) \in E$, c'est-à-dire que chaque sommet hors de N a un successeur dans N.

1.3 Représentation d'un graphe

1.3.1 Représentation graphique

Il existe une infinité de représentation d'un graphe. Les arêtes ne sont pas forcément rectilignes. Si on peut dessiner une graphe G dans le plan sans qu'aucune arête non coupe une autre ,on dit que G est planaire.

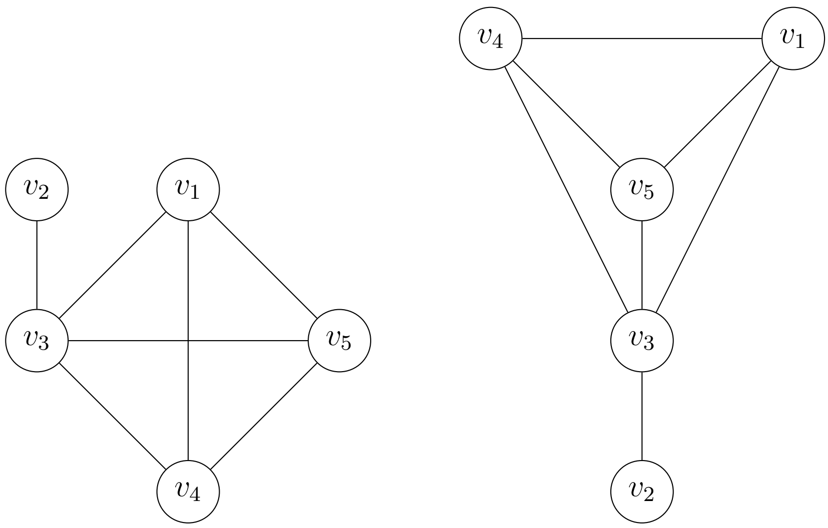

FIGURE 1.9 – (a) Une représentation non planaire du graphe G et (b) sa représentation planaire

1.3.2 Représentation Matricielle

Matrice d'adjacences

On peut Représenter un graphe simple par une matrice $(n * n)$ est un tableau de n lignes et n colonnes , (i,j) désignes l'intersection de la ligne i et de la colonne j. Dans une matrice d'adjacences les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe .Un $\ll 1 \gg$ à la position (i,j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j .

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

- Elle est carrée.

- Il n'y a que des zéros sur la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. Un 1 sur la diagonale indiquerait une boucle.
- Elle est symétrique : $m_{i,j} = m_{j,i}$. On peut dire que la diagonale est un axe de symétrie.
- Il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque graphe. Celle-ci n'est la matrice d ?adjacences d ?aucun autre graphe.

La matrice A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'adjacence du garphe G illustré dans la figure 1.9

Matrice d'incidence

La matrice d'incidence est une matrice n $*$ m où n est le nombre de sommets et m est le nombre d'arêtes du graphe. l'intersection (i,j) contient la valeur
$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si le sommet i est une extrimité de l'arête j ;} \\ o, & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 1.7 *Considérons le graphe non orienté suivant :*

$$G = (V, E) \quad \textit{avec} \quad V = \{A, B, C, D\} \quad \textit{et} \quad E = \{(A, B), (A, C), (B, C), (B, D), (C, D)\}.$$

1. Déterminer la ***matrice d'adjacence*** *de G.*

2. Déterminer la ***matrice d'incidence*** *de G.*

Solution
1. Matrice d'Adjacence
La matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$ d'un graphe non orienté est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour le graphe G, en prenant l'ordre des sommets (A, B, C, D), on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Matrice d'Incidence La matrice d'incidence $M = (m_{ij})$ est définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si le sommet } v_i \text{ est une extrémité de l'arête } e_j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En numérotant les arêtes : $e_1 = (A, B)$, $e_2 = (A, C)$, $e_3 = (B, C)$, $e_4 = (B, D)$, $e_5 = (C, D)$, et en prenant l'ordre des sommets (A, B, C, D), la matrice d'incidence est :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.4 Couplage

Soit G un graphe simple. Un couplage C de G est un sous-graphe partiel 1-régulier de G. On peut aussi dire qu'un couplage (ou appariement) est un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes. Un sommet v est saturé par un couplage C si v est l'extrémité d'une arête de C. Dans le cas contraire, v est insaturé. Un couplage maximum est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes. Un graphe peut posséder plusieurs couplages maximum. Un couplage parfait est un couplage où chaque sommet du graphe est saturé.

1.5 Quelques paramètres d'un graphe :

1.5.1 Distance, Excentricité, Diamètre et Rayon d'un graphe

Distance entre deux sommets *La distance* $d(u, v)$ entre deux sommets u et v d'un graphe G est le nombre d'arêtes dans une plus courte chaîne reliant u à v. **Excentricité d'un sommet** L'*excentricité* d'un sommet u dans un graphe G est la plus grande distance entre le sommet u et n'importe quel autre sommet v de G, c'est à dire $e(u) = \max_{v \in V}\{d(u, v)\}$. **Diamètre d'un graphe** Le *diamètre* du graphe G est la plus grande excentricité dans le graphe G, c'est à dire $diam(G) = \max_{u \in V} e(u)$. **Rayon d'un graphe** Le *rayon* du graphe G est l'excentricité minimum sur tous les sommets de G, c'est à dire $rad(G) = \min_{u \in V} e(u)$.

1.5.2 Le nombre chromatique

Le nombre chromtique d'un graphe G noté $\chi(G)$ est le nombre de couleurs à affecter aux sommets de G, de telle sorte que les sommets adjacents seront de couleurs différentes . .

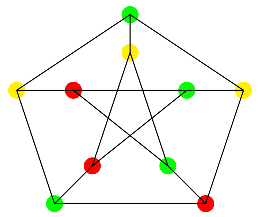

FIGURE 1.10 – Graphe de nombre chromatique $\chi(G) = 3$ et de nombre de stabilité $\alpha(G) = 4$

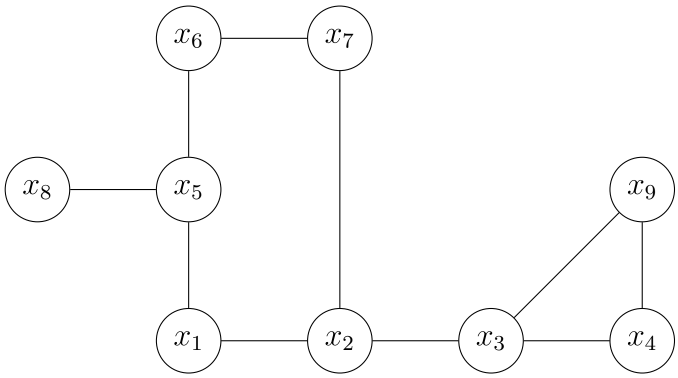

FIGURE 1.11 –

Exercice 1.8 *Reprenons le graphe dans la figure 1.11.*

1. *Calculer l'excentricité de chaque sommet.*
2. *Déduire la valeur du rayon et du Diamètre de ce graphe.*
3. *Calculer le nombre de stabilité et le nombre chromatique de ce graphe.*

Solution de l'exercice sur le graphe de la figure 1.11 1. Calcul de l'excentricité de chaque sommet On construit la matrice des distances D :

$D =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	0	1	2	3	1	2	2	2	3
x_2	1	0	1	2	2	2	1	3	2
x_3	2	1	0	1	3	3	2	4	1
x_4	3	2	1	0	4	4	3	5	1
x_5	1	2	3	4	0	1	2	1	4
x_6	2	2	3	4	1	0	1	2	4
x_7	2	1	2	3	2	1	0	3	3
x_8	2	3	4	5	1	2	3	0	5
x_9	3	2	1	1	4	4	3	5	0

L'excentricité d'un sommet x_i est le maximum des distances dans sa ligne :

Sommet	Excentricité
x_1	3
x_2	3
x_3	4
x_4	5
x_5	4
x_6	4
x_7	3
x_8	5
x_9	5

2. Rayon et Diamètre du graphe

Le **rayon** $r(G)$ est défini comme le plus petit des excentricités :

$$r(G) = \min\{3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 5\} = 3.$$

Le **diamètre** $d(G)$ est le plus grand des excentricités :

$$d(G) = \max\{3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 5\} = 5.$$

3. Nombre de stabilité et nombre chromatique

Le **nombre de stabilité** $\alpha(G)$ est la taille du plus grand ensemble indépendant :

$$\{x_2, x_4, x_8, x_7\} \quad \Rightarrow \quad \alpha(G) = 4.$$

Le **nombre chromatique** $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier le graphe :

$$\chi(G) = 3.$$