تصحيح الامتحان النهائي في مقياس التحليل 1 : (2025/2024)

التمرين 01: (4 نقاط):

1) لدينا: $B=\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \dots\}$

من أجل كل n $\Leftarrow$ $n \geq 1$ $\Leftarrow$ $n-1 \geq 0$

و $2n+1>0$

ومنه: $0 \leq \frac{n-1}{2n+1}$ (0,25)

نلاحظ أنه ~~لما~~:

لدينا $n \to +\infty$ فإن $\frac{n-1}{2n+1} \to \frac{1}{2}$ لنتأكد لدينا:

$2n-2<2n<2n+1 \Leftarrow 2(n-1)<2n+1 \Leftarrow 2\frac{(n-1)}{2n+1}<1$

ومنه $\frac{n-1}{2n+1}<\frac{1}{2}$ (0,25)

• B لديها حد سفلي وحد علوي إذن هي محدودة.

• B غير خالية لأنه مثلا: $\frac{1}{5} \in B$ (0,5)

2) تبيان أن $\sup(B)=\frac{1}{2}$ نستعمل الخاصة المميزة لـ $\sup(B)$:

$$\sup(B)=M \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists x\in B, M-\varepsilon<x \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}, M-\varepsilon<\frac{n_\varepsilon-1}{2n_\varepsilon-1}$$

لدينا

$$\frac{1}{2}-\varepsilon<\frac{n-1}{2n+1} \Rightarrow -\varepsilon<\frac{n-1}{2n+1}-\frac{1}{2}$$ (0,5)

$$\Rightarrow -\varepsilon<\frac{2n-2-2n-1}{4n+2} \Rightarrow -\varepsilon<\frac{-3}{4n+1} \Rightarrow \varepsilon>\frac{3}{4n+1} \Rightarrow \frac{3}{\varepsilon}<4n+1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\varepsilon}-1<4n \Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{3}{\varepsilon}-1\right)<n$$

يكفي أن نأخذ $n_\varepsilon=\left[\left|\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\varepsilon}-1\right)\right|\right]+1$ (0,5)

3) $\min(B)\overset{?}{=}0$: لدينا $0\leq\frac{n-1}{2n-1}$ وبما أن $0\in B$ فإن

$\min(B)=0$ وبما أنه $\min(B)$ موجود فإن $\inf(B)=\min(B)=0$ (1)

4) بما أنه لا يوجد عدد n بحيث $\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}$ فإن $\max B$

غير موجود. (1)

التمرين 2: (6 نقاط)

1) بالتراجع: من أجل n=0 لدينا $u_0>0$ (0,5)

نفترض أن $u_n>0$ ومنه: $1+u_n>0$ (0,5)

وعليه: $\ln(1+u_n)>0$ لأنه في هذه الحالة الدالة متزايدة تماما" ومنه $u_{n+1}>0$. (0,5)

وعليه $u_n>0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

2)

$$g(x)=\ln(1+x)-x$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+x)\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{x}{1+x}\right]=-\infty$$

$$g'(x)=\frac{-x}{1+x} \quad \forall x\ ]0,+\infty[$$ (0,5)

ومنه

$$g'(x)<0,\ \forall x\in\ ]0,+\infty[$$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

(0,5)

نستنتج أن $g(x)<0,\ \forall x\in\ ]0,+\infty[$

لأن الدالة تبدأ بصفر وتتناقص نحو $-\infty$. (0,5)

3) رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_{n+1}-u_n=\ln(1+u_n)-u_n=g(u_n)<0$$

ومنه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة. (1)

4) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل ومتناقصة إذن هي متقاربة وتتقارب نحو حدها السفلي: inf (0,5)

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=l=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}$$

حيث $l\geq 0$ و $l=\ln(l+1)$ بما أن ln دالة مستمرة

فإن: $\ln(l+1) - l = 0 \iff g(l) = 0$

. من جدول ~~ال~~ المتغيرات g فإنه لدينا $l = 0$.

0,5

5) $E = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$

$$\inf E = \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

وبما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة u_0 هو حد علوي لـ E وينتمي لـ E،
حيث $\max E = \sup E = u_0 > 0$.

1

التمرين 03: (4 نقاط)

1) لدينا تعريف الاستمرارية:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

0,5 0,5

ومنه $|x e^{-\frac{1}{x^2}} - 0| < \varepsilon \Rightarrow |x| \, |e^{-\frac{1}{x^2}}| < \varepsilon$

لدينا $x^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} < 0$

ومنه: $e^{-\frac{1}{x^2}} < 1$

0,5

لاحظ أنه إذا تحقق: $|x| < \varepsilon$

فإن: $|x| \, |e^{-\frac{1}{x^2}}| \; \varepsilon$

محققة لأن:

$|x| \, |e^{\frac{1}{x^2}}| < |x|$

يكفي أن نأخذ $\alpha = \varepsilon$

0,5

2) تعريف المشتقة:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

0,5

ومنه

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

1 0,5

التمرين 04 : (3 نقاط)

1) $\frac{d\sin^2(\overbrace{x^2+1}^{u})}{dx} = \frac{d\sin^2(u)}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{d\sin^2(u)}{du}$

$= 4x\left(\cos(x^2+1)\cdot\sin(x^2+1)\right)$ (1)

2) $y = \arccos(x) \Rightarrow \cos y = x \Rightarrow \frac{d\cos y}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{d\cos y}{dy} = 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(-\sin y) = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (1)

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3e^{3x}-5x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(9e^{3x}-5)}{3e^{3x}-5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9\times3\,e^{3x}}{3\times3\,e^{3x}-5}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{9\times9\,e^{3x}}{9\times9\,e^{3x}} = 3$ (2)

(نستخدم قاعدة لوبيتال)

التمرين 05 : (3 نقاط)

1) $\tanh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ (1)

$x = \frac{6,3\times30}{270} = 0,7 \Rightarrow \tanh x = \frac{e^{0,7}-e^{-0,7}}{e^{0,7}+e^{-0,7}} \simeq 0,604$

$v^2 \simeq 293,72 \Rightarrow \boxed{v \simeq 17,14}$ (0,5)

2) $f_1(x) - 2f_2(2x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} - 2\frac{1}{1+e^{-2x}}$

$= \frac{(e^{x}-e^{-x})(1+e^{-2x}) - 2(e^{x}+e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})(1+e^{-2x})}$

$= \frac{e^{x}+e^{-x}-e^{-x}-e^{-3x}-2e^{x}-2e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}+e^{-x}+e^{-3x}}$ (1)

$= \frac{-e^{-x}-2e^{-x}-e^{-3x}}{e^{x}+2e^{-x}+e^{-3x}} = -1$ (0,5)