Abdelhafid Boussouf University Center- Mila
Institute of Sciences and Technology
Module: Analysis 1
January 2025

Academic Year: 2024/2025
First Year Engineering
Semester 1
Duration: 90 minutes

الإمتحان النهائي: التحليل 1
Final exam: Analysis 1

Exercise 1: (4 points)

Let $B = \left\{ \frac{n-1}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

لتكن $B = \left\{ \frac{n-1}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1) Show that B is a non-empty, bounded set.

1) بين أن B مجموعة غير خالية محدودة.

2) Show that $\sup(B) = \frac{1}{2}$.

2) بين أن $\sup(B) = \frac{1}{2}$.

3) Show that $\inf(B) = \min(B) = 0$.

3) بين أن $\inf(B) = \min(B) = 0$.

4) Show that $\max(B)$ does not exist.

4) بين أن $\max(B)$ غير موجود.

Exercise 2: (6 points)

Consider the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ:

$$\begin{cases} U_0 > 0 \\ U_{n+1} = \ln(1+U_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Show that $0 < U_n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

1. بين أن $0 < U_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

2. Define $g(x) = \ln(1+x) - x$. Study the variations of g on $]0,+\infty[$, and specify its sign on $]0,+\infty[$.

2. نعرف $g(x) = \ln(1+x) - x$. أدرس تغير g على $]0,+\infty[$ ، و حدد إشارتها على $]0,+\infty[$.

3. Deduce the monotonicity of $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. استنتج رتابة $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Conclude that $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent and calculate its limit.

4. استخلص أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها.

5. Let $E = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$. Determine $\inf E$ and show that $\sup E$ is positive.

5. لتكن $E = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$. عين $\inf E$ و بين أن $\sup E$ موجب.

Exercise 3: (4 points)

Let

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Using the definitions, show whether $f(x)$:

باستعمال التعريفات، بين إذا ما كانت $f(x)$:

1) is continuous at $x = 0$.

1) مستمرة عند $x = 0$.

$$(Where \lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - l| < \epsilon)$$

2) has a derivative at $x = 0$.

2) لديها مشتقة عند $x = 0$.

Exercise 4: (3 points)

Find:(أوجد)

$$(1)\frac{d\sin^2(x^2+1)}{dx} \qquad (2)\frac{d\arccos(x)}{dx} \qquad (3)\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(3e^{3x} - 5x)}{x}$$

Exercise 5: (3 points)

1. The speed v of waves in shallow water is given by:

1. السرعة v لأمواج في المياه الضحلة تعطى بـ

$$v^2 = 1.8L \tanh \frac{6.3d}{L}$$

where d is the depth and L the wavelength. If $d = 30$ and $L = 270$, calculate the value of v.

حيث d هو عمق الماء و L هو طول الموجة. إذا كان $d = 30$ و $L = 270$ ، أحسب قيمة v .

2. The functions

2. الدالتان

$$f_1(x) = \tanh x, \quad f_2(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

are two different forms of activating functions representing the output of a neuron in a typical neural network. show that $f_1(x) - 2f_2(2x) = -1$.

هما شكلان مختلفان من دوال التنشيط تمثلان مخرج عصبون في شبكة عصبية نموذجية خاصة بالذكاء الإصطناعي.

بين أن $f_1(x) - 2f_2(2x) = -1$.

.....**Good luck**

بالتوفيق