Centre universitaire Abdelhafid Boussouf- Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques Matière : Analyse 04

Responsable de la matière : Dr. Smail KAOUACHE

Solutions de TD2

Solution de l'exercice n°1

On a

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_A y\frac{\exp(2x+y^2)}{1+\exp(x)}dxdy = \left(\int_0^1 \frac{\exp(2x)}{1+\exp(x)}dx\right) \times \left(\int_0^2 y\exp(y^2)dy\right) \\ &= \left(\int_1^e \frac{z}{1+z}dz\right) \times \left(\int_0^2 y\exp(y^2)dy\right) \\ &= [z-\ln(1+z)]_1^e \times \left[\frac{\exp(y^2)}{2}\right]_0^2 = \left(e-1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)\right) \times \left(\frac{\exp(4)-1}{2}\right). \end{aligned}$$

2. $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1, y>1, x+y<3\}$ peut se réécrire sous la forme :

$$B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1<x<2, 1<y<3-x\right\} \text{ (FIGURE 1).}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint\limits_B \frac{dxdy}{(x+y)^3} = \int_1^2 dx \int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^3} = \frac{-1}{2}\int_1^2 \left[\frac{1}{(x+y)^2}\right]_1^{3-x} dx \\ &= \frac{-1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{9}x+\frac{1}{x+1}\right]_1^2 = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice n°2

1. L'intégrale généralisée de Gauss $J_1 = \int\limits_0^\infty \exp(-x^2)dx$ est convergente.

Posons $J_1^a = \int\limits_0^a \exp(-x^2)dx$

Donc $(J_1^a)^2 = \int\limits_0^a \exp(-x^2)dx \times \int\limits_0^a \exp(-y^2)dy = \iint\limits_{[0,a]^2} \exp(-(x^2+y^2))dxdy.$

Posons $x=\rho\cos(\theta)$ et $y=\rho\sin(\theta)$. Alors $(\rho,\theta)\in\left[0,\sqrt{2}a\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Par suite $(J_1^a)^2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{2}a} \rho\exp(-\rho^2)d\rho = \frac{-\pi}{4}\left[\exp(-\rho^2)\right]_0^{\sqrt{2}a}.$

Ce qui implique $(J_1)^2 = \frac{\pi}{4}$, et puisque $\exp(-x^2) > 0$, pour tout x, on a alors

$$J_1 = \int_0^{\infty} \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x,\ xy < 4,\ x^2 + y^2 > 4\}$ peut se réécrire sous la forme :

$$D = D_1 \cup D_2 \text{ (FIGURE 1)},$$

où

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{\sqrt{5}} < x < \sqrt{2} \text{ et } \sqrt{4-x^2} < y < 2x\right\},$$

et

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2} < x < 2 \text{ et } x < y < \frac{4}{x}\right\}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y dxdy &= \iint_{D_1} x^2 y dxdy + \iint_{D_2} x^2 y dxdy = \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} x^2 \left(\int_{\sqrt{4-x^2}}^{2x} ydy\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} x^2 \left(\int_{x}^{\frac{4}{x}} ydy\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} \left(5x^4 - 4x^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2} \left(16 - x^4\right) dx + \\ &= \frac{1}{2}\left[x^5 - \frac{4}{6}x^3\right]_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left[16x - \frac{1}{5}x^5\right]_{\sqrt{2}}^{2} = -\frac{104}{5}\sqrt{2} + \frac{32}{375}\sqrt{5} + \frac{64}{5}.\end{aligned}$$

3) Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Calculons $J_3 = \iint_E \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)} dxdy$.
On pose $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$. Donc $\rho \in [1,2]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. On a alors

$$J_3 = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \frac{\rho\cos(\rho^2)d\rho}{2+\sin(\rho^2)}\right) d\theta = \pi\left[\ln\left(2+\sin(\rho^2)\right)\right]_1^2 = \pi\ln\left(\frac{2+\sin(4)}{2+\sin(1)}\right).$$

4) Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ x + y > 1\}$. Calculons $J_4 = \iint_F \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$..
On pose $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$. Donc $\rho \in \left[\frac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}, 1\right]$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (FIGURE 1). On a alors

$$J_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}^{1} \frac{d\rho}{\rho^3} \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(\theta)+\sin(\theta))^2 - 1 \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)\, d\theta = -\frac{1}{4} \left[\cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

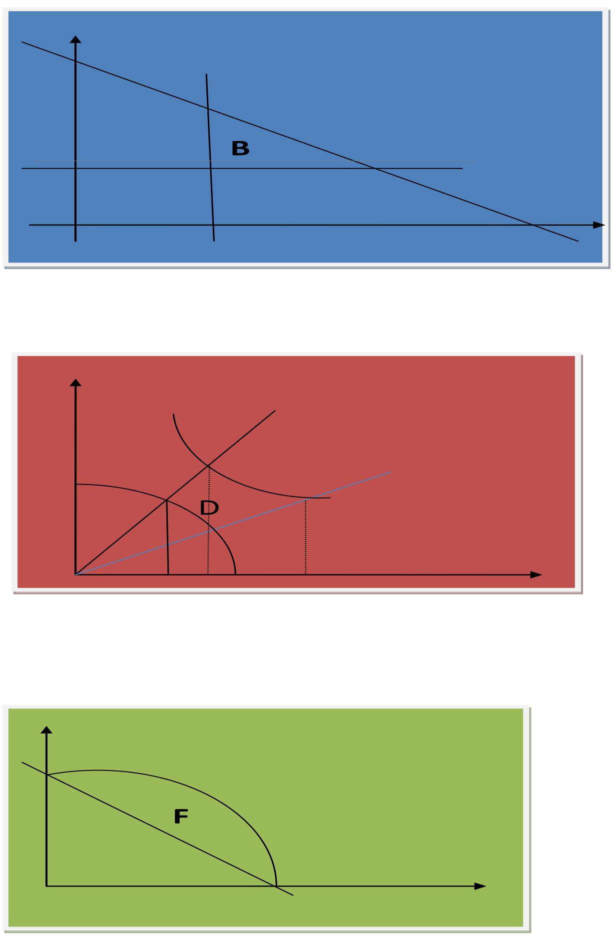

FIGURE 1 –