Centre universitaire Abdelhafid Boussouf- Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques Matière : Analyse 04

Responsable de la matière : Dr. Smail KAOUACHE

Solutions de TD 1

<u>Solution de l'exercice n°1</u> Calculons (lorsqu'elles existent) la limite de f, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. On a $f(0,y) = -1 \neq 1 = f(x,0) \Rightarrow \lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} f(x,y)$ n'existe pas.

2. $|f(x,y)| = \left| \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \to 0$, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$, donc $\lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} f(x,y) = 0$.

3. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\tan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} = \left(\dfrac{\dfrac{\sin(x)}{x} \times \dfrac{\sin(y)}{y}}{\dfrac{\tan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}} \right) \times \left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \to 0$, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$.

4. $|f(x,y)| = \left| \dfrac{\sin(x^2)\sin(y)}{x^2 + \sinh^2(y^2)} \right| \leq \left| \dfrac{x^2|y|}{x^2} \right| \leq |y| \to 0$, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$, donc $\lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} f(x,y) = 0$.

5. Posons $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^x &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\exp\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right) \\ &= 2\cos(\theta)\lim_{r\to 0} r\exp\ln(r) = 0. \end{aligned}$$

6. $|f(x,y)| = \left| \dfrac{\ln(1+|xy|^\alpha)}{x^2+y^2} \right| = \left| \dfrac{\ln(1+|xy|^\alpha)}{|xy|^\alpha} \right| \times \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}|y|^{\alpha-1} \to 0$,quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$ (car $\alpha > 1$),donc $\lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} f(x,y) = 0$.

<u>Solution de l'exercice n°2</u>

Etudions la continuité des fonctions suivantes :

1.$f(x,y)$= $y + \dfrac{1}{y}\arctan(x^2y)$, si $y \neq 0$ et $f(x,0) = 0$.

1.1. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, f est continue.

1.2. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, f est discontinue aux points $(a,0)$, car $\lim_{y\to 0} f(a,y) = a^2 \neq 0 = f(a,0)$.

1.3. Au point $(0,0)$, f est continue, car $\lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} f(a,y) = 0 = f(0,0)$.

2.$g(x,y)$=$x\exp(\arctan(\dfrac{y}{x}))$, si $x \neq 0$ et $g(0,y) = 0$.

2.1. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, g est continue.

2.2. Aux points $(0,b)$ $(b \in \mathbb{R})$, g est continue, car $|g(x,y) - g(0,b)| \leq |x|\exp\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \to 0$,quand $(x,y) \to (0,b)$,donc $\lim_{(x,y)\to(0,b)} g(x,y) = 0$.

Solution de l'exercice n°3

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2 (x\neq y)$, f est continue.

2. Aux pointx $(a,a)\in\mathbb{R}^2$ $(a\in\mathbb{R})$. Puisque h est de classe C^1, d'après le théorème des accroissements finis, à chaque élément $(x,y)\in\mathbb{R}^2 (x\neq y)$, on peut associer $\theta_{x,y}\in\,]0,1[$, tel que :

$$h(x)-h(y)=\dot{h}(y+\theta_{x,y}(x-y))(x-y);$$

ce qui permet d'écrire

$$f(x,y)-f(a,a)=\begin{cases}\dot{h}(y+\theta_{x,y}x(x-y))-\dot{h}(a), \text{ si } x\neq y\\ 0, \text{ si } x=y.\end{cases}$$

Par conséquent $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)=f(a,a)$.

Solution de l'exercice n°4 Soient α_1, α_2, β_1, β_2 et γ cinq constantes positives et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction d´efinie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{\left(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2}\right)^{\gamma}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ g(x), & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Montrons que f continue en $(0,0)$ si et seulement si $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}+\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}>\gamma$.

1. Supposons que f est continue en $(0,0)$. Puisque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, on doit avoir

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[\beta_1]{n}},\frac{1}{\sqrt[\beta_2]{n}}\right)=\frac{1}{2^{\gamma}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}+\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}-\gamma},$$

quantité tend vers 0, quand $n\to+\infty$,lorsque $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}+\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}>\gamma$.

2. La réciproque. Supposons que $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}+\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}>\gamma$. On a pour tout $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)| &= |f(x,y)|=\frac{\left(|x|^{\beta_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\left(|y|^{\beta_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}{\left(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2}\right)^{\gamma}}\\ &\leq \frac{\left(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\left(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}{\left(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2}\right)^{\gamma}}\\ &= \left(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}-\gamma}\to 0, \text{ quand } (x,y)\to(0,0)\,.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice n°5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(|x|+|y|), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrons que f est de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$. On rappelle que $\dfrac{d\,|t|}{t} = \dfrac{t}{|t|}$, pour tout $t \neq 0$.
On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\ln(|x|+|y|) + \dfrac{|x|\,y}{|x|+|y|}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x\ln(|x|+|y|) + \dfrac{x\,|y|}{|x|+|y|}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Les deux fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
De plus, Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &\leq (|x|+|y|)\left|\ln(|x|+|y|)\right| + |y| \to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,, \text{quand } (x,y) \to (0,0) \\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| &\leq (|x|+|y|)\left|\ln(|x|+|y|)\right| + |x| \to 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,, \text{quand } (x,y) \to (0,0)\,. \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$. par conséquent f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Solution de l'e**xercice n°6** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$.

1.1. Démontrons que g est classe C^1.

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $h(t) = \big(\sin(t), \exp(t^2)\big)$. On a alors $g = f \circ h$. Puisque f et h sont de classe C^1, on en déduit que g est aussi de classe C^1.

1.2. Calculons la première dérivéé de g en fonction des dérivvées partielles de f.
On applique la formule de la dérivée d'une fonction composée, on peut écrire

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big(\sin(t),\exp(t^2)\big) \quad \frac{\partial f}{\partial y}\big(\sin(t),\exp(t^2)\big)\right)\begin{pmatrix} \cos t \\ 2t\exp(t^2) \end{pmatrix} \\ &= \cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(\sin(t),\exp(t^2)\big) + 2t\exp(t^2)\frac{\partial f}{\partial y}\big(\sin(t),\exp(t^2)\big)\,. \end{aligned}$$

2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$.

2.1. Démontrons que h est de classe C^1. Soit $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $h(u,v) = (uv, u^2+v^2)$. On a alors $h = f \circ k$. Puisque f et k sont de classe C^1, on en déduit que h est aussi de classe C^1.

2.2. Exprimons les dérivées partielles premières de h en fonction de celles de f. On applique la formule de la dérivée d'une fonction composée, on peut écrire

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) \quad \frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(uv, u^2+v^2\right) \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(uv, u^2+v^2\right)\right)\left(\begin{array}{cc} v & u \\ 2u & 2v \end{array}\right),$$

ce qui implique

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = v\frac{\partial f}{\partial x}\left(uv, u^2+v^2\right) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}\left(uv, u^2+v^2\right) \\ \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial x}\left(uv, u^2+v^2\right) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}\left(uv, u^2+v^2\right) \end{array}\right.$$

<u>Solution de l'exercice n°7</u>

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x,y) = \left\{\begin{array}{cl} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array}\right.$$

1. 1. f est -elle continue sur $\mathbb{R}^2$.

* Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, f est continue.

* Au point $(0,0)$, f est aussi continue, car $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\left|x^2-y^2\right| \to 0$,quand $(x,y) \to (0,0)$,donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

1. 2. f est -elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array}\right.$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{-y^4x-4y^2x^3+x^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array}\right. .$$

Les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

De plus, Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on a

$$\begin{array}{rcl} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| & \leq & 6|y| \to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\text{, quand } (x,y) \to (0,0) \\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| & \leq & 6|x| \to 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\text{, quand } (x,y) \to (0,0). \end{array}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$. par conséquent f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1. 3. Montrons de deux méthodes differrentes la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

*1ère méthode. Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on a donc f estdifférentiable sur $\mathbb{R}^2$.
*2ème méthode. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, f est différentiable.
Au point $(0,0)$, on a $L(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{|f(x,y)-g(0,0)-L(x,y)|}{||(x,y)||} &= \left| xy\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \\ &\leq |x| \to 0, \text{quand } x \to 0.\end{aligned}$$

Alors, f est différentiable en $(0,0)$.
1.4. On a

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}f(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}f(0,0)}{t} = -1 \text{ et } \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}f(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial y}f(0,0)}{t} = 1,$$

ce qui implique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}f(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial x}f(0,0)}{t} = -1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}f(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}f(0,0)}{t} = 1 \end{cases}$$

Puisque $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, d'après le théorème de Schwarz, on en déduit que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Solution de l'exercice n°8</u>

1. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin(x^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin(x)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont-elles différentiabes en $(0,0)$?.

1. 1. $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \end{cases}$

$L_1(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0$, donc

$$\frac{|f(x,y)-f(0,0)-L_1 x,y)|}{||(x,y)||} \overset{V(y,0)}{\simeq} \left|\frac{y^2x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} \to 0, \text{ quand } (x,y) \to (0,0).$$

Alors, f est différentiable en $(0,0)$.

1. 2. De même : $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = 0 \end{cases}$

$L_2(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)x + \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)y = 0$, donc

$$\frac{|g(x,y) - g(0,0) - L_2 x, y)|}{||(x,y)||} = \frac{y^2 \sin(x)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = G(x,y).$$

On a $G(x,x) = \dfrac{x^2\sin(x)}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} \overset{V(0)}{\simeq} \dfrac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{(2)^{\frac{3}{2}}} \nrightarrow 0$. Alors, g n'est pas différentiable en $(0,0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :$f(x,y) = \cos(x)\exp(y)$.

2.1. Le gradient de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est donné par

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)\exp(y) & \cos(x)\exp(y) \end{pmatrix}.$$

2.2. La hessienne de f au point $(0,0)$ est donnée par

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.Trouvons de deux méthodes différentes, le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de $(0,0)$.

<u>Première méthode</u> : Il est claire que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1$, on a alors

$$f(x,y) = \cos(x)\exp y = 1 + y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + (x^2+y^2)\epsilon(x,y),$$

où $\epsilon(x,y) \to 0$, quand $(x,y) \to (0,o)$.

<u>Deuxième méthode :</u>

$$f(x,y) = \cos(x)\exp y = \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)\right) \left(1 + y + \frac{y^2}{2} + y^2\epsilon(y)\right).$$

On fait le produit, et en conservant uniquement les termes en x, y, xy, x^2, y^2 et en englobant tout le reste de la forme $(x^2+y^2)\epsilon(x,y)$, on obtient le même résultat.

3. On a $\det J_\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha\cos(\alpha y) \\ -\alpha\cos(\alpha y) & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2\cos(\alpha x)\cos(\alpha y) \geq 1 - \alpha^2 > 0$.i.e. J_φ est inversible au point (x,y).

φ est de classe C^∞ (évident).

φ est injective ?

Soient (x_1, y_1) et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$. Alors

$$\begin{cases} x_1 - \sin(\alpha y_1) = & x_2 - \sin(\alpha y_2) \\ y_1 - \sin(\alpha x_1) = & y_2 - \sin(\alpha x_2) \end{cases} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| \overset{TAF}{\leq} \alpha\, |y_1 - y_2| \overset{TAF}{\leq} \alpha^2\, |x_1 - x_2|\,.$$

Puisque $1 - \alpha^2 > 0$, on a alors $x_1 = x_2$. Ce qui entraîne à son tour $y_1 = y_2$.

D'aprés le théorème d'inversion globale, φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$.

Solution de l'exercice n°9

1. φ est injective et est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (évident). De plus

$u = x - y$ et $v = x + y \Rightarrow \det j_\varphi(x, y) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, i.e j_φ est inversible.

D'après le théorème d'inversion globale, φ est un $C^{+\infty}$ difféomorphisme.

2. Nous avons $f = g \circ \varphi$. On trouve

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\text{C'est-à-dire}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \end{cases}.$$

$$\text{Donc} \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\right) \\ \qquad = \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}(u, v) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{(\partial v)^2}(u, v) \\ \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x, y) = \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\right) \\ \qquad = \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}(u, v) - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{(\partial v)^2}(u, v) \end{cases}.$$

3. L'équation : $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x, y) = 4(x^2 - y^2)$ devient alors : $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = uv$.

4. En intégrant l'équation précédente on trouve $g(u, v) = \frac{1}{4}u^2v^2 + F(u) + H(v))$,

où F, H sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Par suite $f(x, y) = g(u, v) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)^2 + F(x - y) + H(x + y)$.

Solution de l'exercice n°10

1.1. Soit $f : R^2 \to R$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 2\exp(y) + \sin(xy) - 2$.

Alors, pour tout $(x, y) \in R^2$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\exp(y) + x\cos(xy)$.

Ainsi, puisque $f(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\varphi :]-\sigma, \sigma[\to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$ et pour tout $x \in]-\sigma, \sigma[: f(x, \varphi(x)) = 0$, de plus $\varphi \in C^\infty$.

1.2.Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y\cos(xy)$. Par conséquent $\dot{\varphi}(0)=-\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}=0$.

Autrement dit 0 est un point stationnaire de φ.

Nature du point stationnaire de φ. Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\ddot{\varphi}(0)=-\dfrac{\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,\varphi(0))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,\varphi(0))}=-1<0$,

la fonction φ admet alors un maximum local en $(0,0)$.

2.1. Soit $f: R^3\to R$ la fonction définie par $f(x,y,z)=3x^2+6y^2+z^5-2z^4+1$.

Alors, pour tout $(x,y,z)\in R^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=5z^4-8z^3$.

Ainsi, puisque $f(0,0,1)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,1)=-3\neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\varphi: B((0,0),\sigma)\to R$ telle que $\varphi(0,0)=1$ et pour tout $(x,y)\in B((0,0),\sigma)$: $f(x,y,\varphi(x,y))=0$, de plus $\varphi\in C^\infty$.

2.2. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=6x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=12y$.

Par conséquent $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)=0$. Autrement dit $(0,0)$ est un point stationnaire de φ.

Nature du point stationnaire de φ. Puisque pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,0,1)=6$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0,1)=0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0,0,1)=12$, on a donc $A=2, B=0$ et $C=4$ ou encore $B^2-AC=-8<0$ et $A=2>0$; ce qui entraîne que la fonction φ admet un minimum local en $(0,0)$.

<u>Solution de l'exercice n°11</u>

1.1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ un point stationnaire de $f(x,y)=x+y^2-\sinh(x+y)$. On a alors

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=1-\cosh(a+b)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=2b-\cosh(a+b)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\ 2b-1=0\end{cases}\Rightarrow (a,b)=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

1.2 Nature du point stationnaire $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. On a

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y)=-\sinh(x+y)\\ \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y)=2-\sinh(x+y)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-\sinh(x+y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=0\\ B=\dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=2\\ C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=0\end{cases}$$

$B^2-Ac=0$, cas douteux.

Soit $\delta>0$ on a

$$f(-\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2}-\delta)=-\frac{1}{4}+\delta^2>-\frac{1}{4}=f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

et

$$\begin{aligned} f(-\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2}) &= -\frac{1}{4}+\delta-\sinh\delta > -\frac{1}{4} = f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ &< -\frac{1}{4} = f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad (\text{car } \sinh\delta > \delta \end{aligned}$$

Par conséquent, $\exists x_1 = (-\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2}-\delta) \in B\left((-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\delta\right)$ et $\exists x_2 = (-\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2}) \in B\left((-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\delta\right)$ vérifiant $f(x_1) > f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $f(x_2) < f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Donc f n'admet pas un extremum local en $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

2.1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un point stationnaire de $g(x,y) = x+y-\sinh(x+y)$. On a alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) = 1-\cosh(a+b) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 1-\cosh(a+b) = 0 \end{cases} \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow (a,b) = (-a,a).$$

2.2 Nature du point stationnaire $(-a,a)$. On a

$$\frac{\partial^2 g}{(\partial x)^2}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{(\partial y)^2}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sinh(x+y) \Rightarrow A=B=C=0$$

$B^2 - Ac = 0$, cas douteux.

Soit $\delta > 0$ on a

$$g(a+\delta,-a) = \delta - \sinh\delta < 0 = g(-a,a)$$

et

$$g(a-\delta,-a) = -\delta + \sinh\delta > 0 = g(-a,a)$$

Par conséquent, $\exists x_1 = (a+\delta,-a) \in B((-a,a),\delta)$ et $\exists x_2 = (a-\delta,-a) \in B((-a,a),\delta)$ vérifiant $g(x_1) < g(-a,a)$ et $g(x_2) > g(-a,a)$. Donc g n'admet pas un extremum local en $(-a,a)$.

Solution de l'exercice n°12

Trouvons les extremums des fonctions $f_i : E_i \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(i = 1,2,3)$ définie par

1. $f_1(x,y) = x(1+y) + \ln(\sqrt{2+x^2+y^2})$ et $E_1 = \overline{B((0,0),1)}$.

On a

$$\begin{aligned} \overline{B((0,0),1)} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\right\} \\ &= \mathring{B}((0,0),1) \cup \partial B((0,0),1). \end{aligned}$$

La fonction f_1 est continue sur $\overline{B((0,0),1)}$ qui est un ensemble compact, donc elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) l'un de ces points.

1.1. Sur $\mathring{B}\left((0,0),1\right)$, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 1 + b + \dfrac{a}{2+a^2+b^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a + \dfrac{b}{2+a^2+b^2} \end{cases}.$$

Supposons que $\nabla_f(a,b) = (0,0)$;c'est-à-dire

$$\begin{cases} 1 + b + \dfrac{a}{2+a^2+b^2} = 0 \\ a + \dfrac{b}{2+a^2+b^2} = 0, \end{cases}.$$

ce qui implique

$$a^2 = b(b+1) \tag{1}$$

et puisque $(a,b) \in \mathring{B}\left((0,0),1\right)$, on a donc

$$a^2 + b^2 < 1 \tag{2a}$$

De (1) et (2a), on trouve $2b^2 + b - 1 < 0$, contradiction. Donc $\nabla_f(a,b) \neq (0,0)$, pour tout $(a,b) \in \mathring{B}\left((0,0),1\right)$, et par suite f_1 n'admet pas des extrema sur $\mathring{B}\left((0,0),1\right)$

On cherche les extrema sur $\partial B\left((0,0),1\right)$. On a

$$\partial B\left((0,0),1\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2-1 = 0 = g(x,y)\right\}$$

Par suite

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) = 2a \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 2b \end{cases}.$$

Soit $(a,b) \in \partial B\left((0,0),1\right)$, on a donc $a^2+b^2 = 1$.

Si on suppose que $\nabla g(a,b) = (0,0)$;c'est-à-dire $a = b = 0$, donc $a^2+b^2 = 0$ contradiction avec $a^2+b^2 = 1$.Alors $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, donc $rang\nabla g(a,b) = 1$. D'après le théorème de Lagrange, $\exists\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{cases} \nabla(f_1 + \lambda g)(a,b) = (0,0) \\ g(a,b) = 0 \end{cases} \tag{3a}$$

D'autre part, $(a,b) \in \partial B\left((0,0),1\right)$, on peut lors écrire

$$\begin{aligned} f_1(a,b) &= a(1+b) + \ln(\sqrt{2+a^2+b^2}) \\ &= a(1+b) + \frac{\ln 3}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

De (3a) et (4), on trouve

$$\begin{cases} (1+b)+2\lambda a=0 \\ a+2\lambda b=0 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=(1+b)b+b^2 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Rightarrow 2b^2+b-1=0$$

Donc $b_1=-1$ et $b_2=\dfrac{1}{2}$.

Pour $b_1=-1$, on trouve $a_1=0$, et pour $b_2=\dfrac{1}{2}$, on trouve $a_2=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.On a alors

$$f_1(0,-1)=\frac{\ln 3}{2} \text{ et } f_1(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})=\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\ln 3}{2}..$$

Par conséquent

$$\max_{x\in\overline{B}} f_1(x,y)=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\ln 3}{2} \text{ et } \min_{x\in\overline{B}} f_1(x,y)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\ln 3}{2}.$$