

TD 1 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice n°1 Calculer (lorsqu'elles existent) les limites suivantes

$$\begin{aligned} 1. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad 2. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 3. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x) \sin(y)}{\tan(\sqrt{x^2 + y^2})}, \\ 4. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2) \sin(y)}{x^2 + \sinh^2(y^2)}, \quad 5. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^x, \quad 6. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + |xy|^\alpha)}{x^2 + y^2}, \quad \alpha > 1. \end{aligned}$$

Exercice n°2

Etudier la continuité des fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} 1. f(x, y) &= \begin{cases} y + \frac{1}{y} \arctan(x^2 y), & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases} \\ 2. g(x, y) &= \begin{cases} x \exp(\arctan(\frac{y}{x})), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice n°3 Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{h(x) - h(y)}{x - y}, & \text{si } x \neq y \\ h(x), & \text{si } x = y, \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°4 Soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et γ cinq constantes positives et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha_1} |y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2})^\gamma}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ g(x), & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0, 0)$ si et seulement si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \gamma$.

Exercice n°5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(|x| + |y|), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

1. On définit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(\sin(t), \exp(t^2))$. Démontrer que g est de classe C^1 et calculer la première dérivée de g en fonction des dérivées partielles de f .
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$. Démontrer que h est de classe C^1 et exprimer les dérivées partielles premières de h en fonction de celles de f .

Exercice n°7 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. 1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$.
1. 2. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
1. 3. Montrer de deux façons différentes la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
- 1.4. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Conclure.
2. (Partie Supplémentaire) Même questions pour la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$g(x, y) = \begin{cases} x^2 y \ln(x^2 - y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exercice n°8 1. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin(x^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin(x)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont-elles différentiables en $(0, 0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x, y) = \cos(x) \exp(y)$.

2.1. Calculer le gradient de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2.2. Calculer la hessienne de f au point $(0, 0)$.

2.3. Trouver de deux façons différentes, le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de $(0, 0)$.

3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\varphi(x, y) = (x - \sin(\alpha y), y - \sin(\alpha x)), \quad \alpha \in]-1, 1[.$$

La fonction φ est-elle un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$?

Exercice n°9

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\varphi(x, y) = (u = x - y, v = x + y)$. On suppose g de classe C^2 .

Soit $f = g \circ \varphi$.

1. Montrer que φ détermine un C^2 -difféomorphisme .
2. Exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction de celle de g .
3. Montrer que si f est solution de l'E.D.P :

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x, y) = 4(x^2 - y^2), \quad (1)$$

alors g est solution de $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x, y) - uv = 0$

4. En déduire la solution générale de (1)

Exercice n°10

1. Montrer que l'équation $x^2 + 2 \exp(y) + \sin(xy) - 2 = 0$ définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 0$.

Montrer que φ admet un maximum local en 0.

2. Montrer que l'équation $3x^2 + 6y^2 + z^5 - 2z^4 + 1 = 0$ définit au voisinage du point $(0, 0)$ une fonction implicite $z = \varphi(x, y)$ telle que $\varphi(0, 0) = 1$.

Vérifier que $(0, 0)$ est un point stationnaire de φ . Etudier sa nature.

Exercice n°11

Trouver les points stationnaires des fonctions suivantes et étudier leurs natures :

1. $f(x, y) = x + y^2 - \sinh(x + y)$.
2. $g(x, y) = x + y - \sinh(x + y)$

Exercice n°12

Trouver les extremums des fonctions $f_i : E_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, 3)$ définies par

1. $f_1(x, y) = x(1 + y) + \ln(\sqrt{2 + x^2 + y^2})$ et $E_1 = \overline{B((0, 0), 1)}$.
2. $f_2(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$ et $E_2 = \overline{B((0, 0), 1)}$.
3. $f_3(x, y) = \frac{y^2}{x + y}$ et $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x \leq y\}$.