Examen final

Transfert de chaleur I

Durée : 1 h 30 mn

Questions de cours (6 points)

1) Montrer Le coefficient de frottement pariétal $Cf_P = \dfrac{\tau_P}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$ est adimensionnel.
2) Si un fluide de masse volumique ρ a une vitesse $\vec{V}$ de composantes cartésiennes (V_x, V_y, V_z), écrire son équation de continuité en coordonnées cartésiennes et en régime permanent.
3) Dans l'équation du mouvement ci-dessous, donner le nom de chaque terme

$$\underbrace{\frac{\partial V_i}{\partial t}}_{1} + \underbrace{V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}}_{2} = -\underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_i}}_{3} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}}_{4} + \underbrace{\nu \Delta V_i}_{5}$$

Exercice n°1 (4 points)

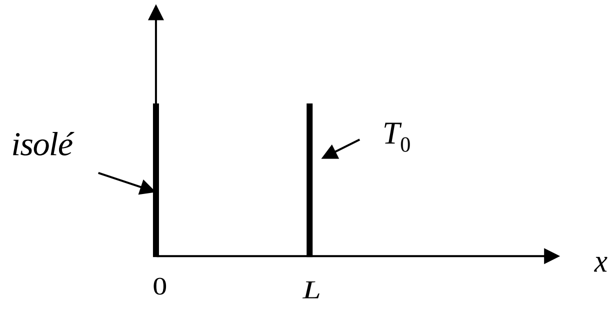
Une sphère de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 est constitué d'un matériau de conductivité thermique $\lambda(T) = a + bT + cT^2$.

1) quelles sont les unités des constantes a, b et c,
2) si les températures des deux parois sont T_1 et T_2, calculer la quantité de chaleur échangée Q.

Exercice n°2 (10 points)

Un mur plan d'épaisseur L et de conductivité thermique λ, dont un côté est maintenu à la température constante T_0 et l'autre est isolé, est le siège d'une génération de chaleur interne $q_S = q_0 e^{\alpha x}$ où q_0 et α sont des constantes positives.

1) quelles sont les unités de q_0 et α ,
2) écrire l'équation de Poisson,
3) écrire les conditions aux limites,
4) trouver les constantes d'intégration C_1 et C_2,
5) déduire la température $T(x)$ et
6) calculer le flux de chaleur q évacué



Corrigé type de l'examen final

Transfert de chaleur I

Durée : 1 heure

Questions de cours (6 points)

1) Comme le coefficient de frottement pariétal est

$$Cf_P = \frac{\tau_P}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

nous avons

$$[Cf_P] = \frac{[\tau_P]}{[U_\infty^2][\rho]} = \frac{Nm^{-2}}{m^2 s^{-2} kgm^{-3}} = \frac{kgms^{-2}m^{-2}}{m^2 s^{-2} kgm^{-3}} = 1 \quad \boxed{0.5+0.5+0.5+0.5}$$

ainsi le coefficient de frottement pariétal est adimensionnel.

2) L'équation de continuité en régime permanent est

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\rho \vec{V}\right) = 0 \quad \boxed{1.0}$$

soit en coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial\left(\rho V_x(x,y,z)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho V_y(x,y,z)\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho V_z(x,y,z)\right)}{\partial z} = 0 \quad \boxed{1.0}$$

3) Dans l'équation du mouvement ci-dessous

$$\underset{1}{\frac{\partial V_i}{\partial t}} + \underbrace{V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}}_{2} = \underset{3}{-\frac{\partial U}{\partial x_i}} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}}_{4} + \underset{5}{\nu \Delta V_i} \quad \boxed{0.4+0.4+0.4+0.4+0.4}$$

les termes sont :

1) terme temporel,
2) termes d'inertie,
3) force volumique dérivant d'un potentiel,
4) gradient de pression et
5) termes de diffusion.

Exercice n°1 (4 points)

1) Les unités de la constante a, b et c sont :

$$[a] = [\lambda(r)] = Wm^{-1}{}^\circ C^{-1} \quad \boxed{0.5}$$

$$[b] = \frac{[\lambda(r)]}{[T(r)]} = Wm^{-1}{}^\circ C^{-1} C^{-1} = Wm^{-1}{}^\circ C^{-2} \quad \boxed{0.5}$$

$$[c]=\frac{[\lambda(r)]}{[T^2(r)]}=Wm^{-1}°C^{-1}C^{-2}=Wm^{-1}°C^{-3} \quad \boxed{0.5}$$

2) A partir de la loi de Fourier, nous avons

$$Q=-\lambda(r)S(r)\frac{dT(r)}{dr} \quad \boxed{0.5}$$

la surface du cylindre est $S(r)=4\pi r^2$ $\boxed{0.5}$, en y substituant l'expression de la conductivité thermique, nous trouvons

$$Q=-4\pi r^2\left(a+bT+cT^2\right)\frac{dT(r)}{dr} \quad \boxed{0.5}$$

en séparant les variables et en intégrant, nous obtenons

$$\frac{Q}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}=-\int_{T_1}^{T_2}\left(a+bT+cT^2\right)dT \quad \boxed{0.5}$$

soit

$$Q=\frac{4\pi\left(a\left(T_1-T_2\right)+\frac{b}{2}\left(T_1^2-T_2^2\right)+\frac{c}{3}\left(T_1^3-T_2^3\right)\right)}{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}} \quad \boxed{0.5}$$

<u>Exercice n°2</u> (10 points)

1) Les unités des constantes q_0 et α sont :

$$[q_0]=[q]=Wm^{-3} \quad \boxed{1.0}$$

$$[\alpha]=\frac{1}{[x]}=m^{-1} \quad \boxed{1.0}$$

2) L'équation de Poisson dans ce cas est

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{q_0}{\lambda}e^{\alpha x}=0 \quad \boxed{1.0}$$

3) Les conditions aux limites pour cette équation sont

$$x=0,\frac{dT}{dx}=0$$
$$x=L,T=T_0 \quad \boxed{0.5+0.5}$$

4) L'intégration de l'équation de Poisson nous donne

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\frac{q_0}{\lambda\alpha}e^{\alpha x} + C_1$$

0.5+0.5

$$T(x) = -\frac{q_0}{\lambda\alpha^2}e^{\alpha x} + C_1 x + C_2$$

En calculant les constantes d'intégration C_1 et C_2 à partir des conditions aux limites, nous obtenons

$$C_1 = \frac{q_0}{\lambda\alpha}$$

1.0+1.0

$$C_2 = T_0 + \frac{q_0}{\lambda\alpha^2}e^{\alpha L} - \frac{q_0}{\lambda\alpha}L$$

5) Ainsi, la distribution de la température s'écrit sous la forme

$$T(x) - T_0 = -\frac{q_0}{\lambda\alpha^2}\left(e^{\alpha x} - e^{\alpha L}\right) + \frac{q_0}{\lambda\alpha}(x - L)$$

2.0

6) Le flux de chaleur évacué est

$$q = -\lambda\left(-\frac{q_0}{\lambda\alpha}e^{\alpha x} + \frac{q_0}{\lambda\alpha}\right)_{x=L} = \frac{q_0}{\alpha}e^{\alpha L} - \frac{q_0}{\alpha} = \frac{q_0}{\alpha}\left(e^{\alpha L} - 1\right)$$

1.0