CHAPITRE

8

CALCUL DES VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

Sommaire

1 Introduction

De nombreuses méthodes numériques supposent la connaissance des valeurs propres, des vecteurs propres et du rayon spectral d'une matrice. En outre de nombreux problèmes se ramènent à la recherche des valeurs propres d'une matrice. Le plus souvent, on fait appel à deux types de méthodes numé riques pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres (appelé s aussi éléments propres) d'une matrice. *les méthodes directes* sont celles qui permettent d'obtenir les éléments propres à partir de la connaissance explicite du polynôme caracté ristique ; les autres sont essentiellement des *méthodes itératives.* Ces dénominations présentent une certaine ambiguité. En effet, le plus souvent, la détermination du polynôme caracté ristique est obtenue par un procédé itératif et la recherche des racines de ce polynôme est presque toujours itérative. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons chercher ses valeurs propres λ_i dont la multiplicité sera notée m_i.

2 RAPPELS

3 Calcul direct de $\det(A - \lambda I)$

On se donne $(n+1)$ valeurs distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n+1}$ quelconques ; on calcule pour chacune d'elles la valeur

$$y_i = \det(A - \lambda_i I) \qquad i = 1, 2, ..., n+1.$$

On obtient ainsi un ensemble de valeurs $\{(\lambda_i, y_i)\}_{i=1,2,...,n+1}$. On détermine alors, le polynô me d'interpolation passant par ces points. Il sera identique, à un facteur multiplicatif près, au polynôme caractéristique de A. On peut alors chercher ses racines par l'une des méthodes connues ; ce qui aboutira à une approximation des valeurs propres de A.

4 Méthode de Krylov

La méthode consiste à calculer les coefficients du polynôme caractéristique dont on approche les racines à l'aide des mé thodes connues. Les vecteurs propres associés sont alors détermin és par les formules appropriées. Plus précisément, soit :

$$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k})$$

le polynôme caractéristique de A. D'après le théorème de Cayley-Hamilton (A annule son polynôme caractéristique), on a donc $P(A) = 0$; donc :

$$A^n = \sum_{k=1}^{n} a_k A^{n-k}$$

Prenons un vecteur quelconque x_0 non nul, on a :

$$A^n x_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k A^{n-k} x_0 \tag{4.1}$$

Notons a le vecteur de composante (a_i) ; $i = 1, 2, ..., n$

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 \\ x_2 &= A^2 x_0 \\ &\;\;..... \\ x_{n-1} &= A^{n-1} x_0 \end{aligned}$$

et B la matrice dont les n colonnes sont les vecteurs

$$x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1, x_0$$

L'équation (4.1) peut s'écrire :

$$A^n x_0 = Ba \tag{4.2}$$

Pour x_0 donné, on cherche a solution de (4.2). On obtiendra ainsi, si le système est inversible, les coefficients du polyn ôme caractéristique et on pourra utiliser une des méthodes de r ésolution des équations non linéaires pour calculer ses racines qui sont les valeurs propres de A. Cette méthode permet en outre de déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres calculées. Pour simplifier, nous supposerons que les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont distinctes. Si nous appelons $v_1, v_2, ..., v_n$ les vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, nous pouvons décomposer le vecteur x_0, choisi arbitrairement dans la recherche des coefficients (a_i), suivant la base des $\{v_i\}_{i=1,2,...,n}$. On a alors

$$x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

comme

$$\begin{array}{rcl} Av_i &=& \lambda_i v_i \\ A^2 v_i &=& \lambda_i^2 v_i \\ && \ldots\ldots \end{array}$$

on aura

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + ... + \alpha_n \lambda_n v_n \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &=& \alpha_1 \lambda_1^{n-1} v_1 + \alpha_2 \lambda_2^{n-1} v_2 + ... + \alpha_n \lambda_n^{n-1} v_n \end{array}$$

Considérons une combinason linéaire des vecteurs $x_0, x_1, ..., x_{n-2}, x_{n-1}$. On a

$$\begin{array}{rcl} x_{n-1} &=& \beta_{i1} x_{n-2} + \cdots + \beta_{in-1} x_0 = \\ && \alpha_1 \varphi_i(\lambda_1) v_1 + \alpha_2 \varphi_i(\lambda_2) v_2 + \cdots + \alpha_n \varphi_i(\lambda_n) v_n \\ \text{où } \varphi_i(\lambda) &=& \lambda^{n-1} + \beta_{i1} \lambda^{n-2} + \cdots + \beta_{in-1} \end{array} \tag{4.3}$$

on peut choisir par exemple la formule (4.3) s'écrit alors

$$x_{n-1} + \beta_{i1} x_{n-2} + ... + \beta_{in-1} x_0 = \alpha_i \varphi_i(\lambda_i) v_i.$$

Donc, si $\alpha_i \neq 0$ la combinaison linéaire obtenue permet de d éterminer le vecteur propre v_i. Avec le choix (**??**), les coefficients β_{ij} s'obtiennent facilement par identification. Plus précisement nous avons

$$\begin{array}{rcl} \beta_{i0} &=& 1 \\ \beta_{ij} &=& \lambda_i \beta_{ij-1} - a_j \end{array}$$

Remarque 234. Si les vecteurs $x_0, x_1, ..., x_{n-2}, x_{n-1}$ sont linéairement ind épendant, la matrice B est inversible et on obtient bien les coefficients caractéristiques dont on peut calculer les valeurs propres. Mais il arrive que ces vecteurs ne soient pas linéairement indé pendants. Par exemple x_k s'exprime comme combinaison linéaire des pr écédents et de même des suivants. On peut alors appliquer la m éthode précédente avec les vecteurs $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$; ce qui donnera un polynôme dont les racines seront racines du polynô me caractéristique et donc valeurs propres de A. On évite en général cette complication en changeant de vecteur initial.

5 MÉTHODE DE LEVERRIER

Les coefficients du polynôme caractéristique sont déterminés par la formule (5.2) suivante. On utilise ensuite les méthodes de résolution des équations non linéaires pour calculer les racines de ce polynôme ; ce qui détermine les valeurs propres. Posons

$$P(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n+1} \quad \text{avec} \quad a_1 \neq 0.$$

Les relations de Newton entre les racines $x_1, x_2, \dots, x_n$ et les coefficients de ce polynôme sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_2 + a_1 S_1 & = & 0 \\ 2a_3 + a_2 S_1 + a_1 S_2 & = & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ k a_{k+1} + a_k S_1 + \cdots + a_1 S_k & = & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ n a_{n+1} + a_n S_1 + \cdots + a_1 S_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.1}$$

avec $S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$. Donc, en considérant le polynôme caractéristique de A, dont les racines sont les valeurs propres λ_i de A, on a

$$\begin{array}{ccc} S_k & = & T_r(A^k) \\ a_1 & = & (-1)^n \end{array}$$

ce qui nous permet de calculer les coefficients a_k pour $k = 2, \dots, n+1$. Plus précisément on a :

$$a_k = -\frac{1}{k-1} a_{k-1} S_1 + \dots + a_2 S_{k-2} + a_1 S_{k-1} \tag{5.2}$$

Remarque 235. La méthode de Leverrier présente un grave inconvénient : elle impose le calcul des puissances souvent élevées de la matrice initiale. Par contre son algorithme est simple et il n'y a pas lieu d'envisager des cas particuliers