Chapitre

7

Résolution numérique des E.D.O. d'ordre un

1 Introduction

Les équations différentielles ordinaires ou E.D.O. sont utilisées pour modéliser un grand nombre de phénomènes mécaniques, physiques, chimiques, biologiques etc...

Soit f une fonction continue

$$f: \quad [a,b] \times \mathbb{R}^{\ltimes} \to \mathbb{R}^{\ltimes} \tag{1.1}$$

$$(t,y) \mapsto f(t,y) \tag{1.2}$$

telle que :

$$f = (f_1, f_2, ..., f_n)$$

et

$$f_i: \quad [a,b] \times \mathbb{R}^{\ltimes} \to \mathbb{R}$$
$$(t,y) \mapsto f_i(t,y)$$

Définition 219. **1- E.D.O. du premier ordre :** On appelle équation différentielle ordinaire du premier d'ordre une équation de la forme :

$$y\prime(t) = f(t, y(t)) \qquad t \in [a,b] \tag{1.3}$$

2- E.D.O. d'ordre p : On appelle équation différentielle d'ordre p une équation de la forme :

$$y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y\prime(t), y^{(2)}(t), \ldots\ldots, \ldots, y^{(p-1)}(t)) \qquad t \in [a,b] \tag{1.4}$$

f est une fonction continue donnée

$$f: \quad [a,b] \times (R^n)^p \to \mathbb{R}^{\ltimes}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

1. Une fonction y de classe C^1 vérifiant l'équation (1.3) est dite solution de l'équation différentielle du premier ordre.
2. Une fonction y de classe C^p vérifiant l'équation (1.4) est dite solution de l'équation différentielle d'ordre p.

Proposition 220. Toute équation différentielle d'ordre n sous forme canonique peut s'écrire comme un système de n équations différentielles du premier ordre.

Remarque 221. L'équation (1.3) est donc équivalente au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y\prime_1(t) & = & f_1(t, y_1, \ldots\ldots\ldots, y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ y\prime_n(t) & = & f_n(t, y_1, \ldots\ldots\ldots, y_n) \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Cela se fait en posant

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z_1 & = & y \\ z_2 & = & y\prime \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ z_p & = & y^{p-1} \end{array} \right. \tag{1.6}$$

où $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_p$ sont des fonctions de classe C^1 et l'équation différentielle d'ordre p (1.4) est est équivalente au système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z\prime_1 & = & y \\ z\prime_2 & = & y\prime \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ z\prime_p & = & f(t, z_1, \ldots\ldots, z_p) \end{array}\right. \tag{1.7}$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$z\prime(t) = g(t, z(t))$$

Avec

$$g : [a,b] \times (R^n)^p \to (R^n)^p$$
$$(t,y) \mapsto f(t,y)$$

Ce qui veut dire que l'étude d'une équation différentielle d'ordre p dans $\mathbb{R}^{\ltimes}$ est ramenée à une équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^{\ltimes p}$.

Toute équation différentielle d'ordre p sous forme canonique peut s'écrire comme un système de p équations différentielles du premier ordre.

2 PROBLEME DE CAUCHY

Définition 222. On appelle problème de Cauchy, le problème qui consiste en la recherche d'un fonction y de classe C^1 vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lll} y\prime(t) = & f(t, y(t)) & \\ y(a) = & y(0), \quad y_0 \quad \text{donné dans} & \mathbb{R}^{\ltimes} \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Soit f une fonction continue

$$f : \quad [a,b] \times \mathbb{R}^{\ltimes} \to \mathbb{R}^{\ltimes}$$
$$(t,y) \mapsto f(t,y)$$

Théorème 223. Soit le problème de Cauchy (2.1). Si f vérifie en plus de la continuité, la condition de Lipchitz, c'est-à-dire

$$\|f(t,y) - f(t,y^*)\| \le k\|y - y^*\|; k > 0. \quad \forall t \in [a,b]; \forall y, y^* \in \mathbb{R}^{\ltimes} \tag{2.2}$$

alors le problème de Cauchy (2.1) admet une et une solution de classe C^1.

De très nombreux résultats mathématiques existent sur les problèmes de Cauchy.

Dans ce qui suit nous allons nous intéresser à certaines méthodes numériques de résolution de ce type de problème.

L'ensemble des méthodes numériques que nous allons étudier auront pour but la résolution d'un problème de Cauchy quelconque. Elles pourront donc être utilisées pour la résolution d'une très grande variété d'E.D.O.

Deux questions se posent, dans la résolution de ce type de problème (Cauchy).

1. Trouver une approximation numérique de la solution.
2. Majorer l'erreur commise à partir de cette approximation.

3 MÉTHODE de TAYLOR d'ORDRE 2

Pour résoudre numériquement le problème de Cauchy (2.1), On ecrit :

$$y(t) \quad = \quad y_0 + \frac{(t-a)}{1!}y\prime(a) + \frac{(t-a)^2}{2!}y\prime\prime(a) + \ldots$$

Avec y_0 donnée

$$\begin{aligned} y\prime(a) &= f(a, y_0) = y\prime_0 \\ y\prime\prime(a) &= f(a, y_0) = y\prime_0 + \frac{\delta f}{\delta t}(a, y_0) + y\prime_0 \frac{\delta f}{\delta y}(a, y_0) \\ \ldots & \ldots \ldots \end{aligned}$$

Les formules de dérivation se compliquent très vite, et il est très souvent impossible d'avoir une idée sur le rayon de convergence de cette série (de Taylor).

Cette méthode est en général utilisée localement au voisinage du point $t_0 = a$.

4 MÉTHODES NUMERIQUES PAR PAS

Dans ce genre de méthodes, on va subdiviser l'intervalle $[a, b]$ par des points $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_N$ équidistants : $t_{n+1} = t_n + h$. avec $h = \frac{b-a}{N}$ le pas de la subdivision.

On calcule N nombres $y_1, y_2, \ldots\ldots N$ ayant une valeur proche de celle de la solution y aux points $t_n = a_n + h$; $n = 0, \ldots\ldots, N$.

Ensuite, on fait une interpolation pour relier ces points et définir une fonction y_h sur $[a, b]$.

L'erreur de discretisation dépendante de h est estimée par la formule ;

$$e_n = y_n - y(t_n)$$

.

On distingue deux types d'algorithmes par :

1. Les algorithmes à pas séparés ou méthodes à un pas qui permettent de calculer y_{i+1} à partir de y_i.
2. Les algorithmes à pas liés ou méthodes à pas multiples qui permettent de calculer y_{i+1} à partir des $y_i, y_{i-1}, \ldots$ précédents.

5 MÉTHODE d'EULER-CAUCHY

Cette méthode étant la plus simple des méthodes numériques par pas.

En partant du développement de Taylor on a :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy\prime(t_n) + R$$

D'où :

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = y\prime(t_n) + \frac{R}{h}$$

Si $\frac{R}{h}$ est suffisamment petit, on peut considérer que

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

est une bonne approximation de $y\prime(t_n)$ d'où **l'algorithme de Euler-Cauchy**.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n); \quad n = 0, 1 \ldots. N \\ y(0) = y(a) \end{cases} \tag{5.1}$$

On peut interpréter cet algorithme comme :

connaissant y_n, on calcule y_{n+1} comme étant l'ordonnée du point d'intersection de la droite $t = t_{n+1}$ avec la droite passant par le point (t_n, y_n) ayant pour pente $f(t_n, y_n)$ c'est-à -dire la pente de la tangente en (t_n, y_n) à la courbe solution.

Théorème 224. Si la fonction f vérifie les hypothèses suivantes :

1- f est continue

2- f est lipchitzienne de rapport $K > 0$.

La methode de Euler-Cauchy (5.1) converge.

De plus on a une estimation de l'erreur sous la forme :

$$|e_n| = |y_n - y(t_n)| \leq \frac{e^{K(t_n - t_0)} - 1}{K} M(h, y\prime)$$

et

$$\max_{n=1,\dots,N} |e_n| \to 0 \text{quand} h \to 0$$

5.1 Estimation de l'erreur dans la méthode d'Euler-Cauchy

On va chercher une majoration de l'erreur qui ne dépendra que des données.

Soit la proposition :

Proposition 225. Soit

$$c = \sup_{t \in [a,b]} |f(t, 0)|.$$

Alors

$$\|y_h\| \leq |y_0| e^{K(b-a)} + c \frac{e^{K(b-a)} - 1}{K} = D$$

et

$$\|y_h\| \leq D$$

Théorème 226. On pose

$$M_1 = \sup_{t \in [a,b]} |f(t, y)|$$

et

$$M_D(\delta, f) = \sup_{t, t' \in [a,b]} |f(t, y) - f(t', y)|$$

avec

$$\|y\| \leq D$$

et

$$t, t' \in [a, b]$$

Alors

$$|e_n| \leq (M_D(h, f) + hKM_1) \frac{e^{K(t_n - t_0)} - 1}{K}$$

La majoration de l'erreur donnée par ce théorème en fonction seulement des données est difficile a calculer numériquement.

On peut simplifier cette estimation en ajoutant une hypothèse supplémentaire.

Théorème 227. Soit Ω le domaine défini par :

$$\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R}^{\not\vDash} | t \in [a, b], |y| \leq D\}$$

avec

$$D = |y_0| e^{K(b-a)} + c \frac{e^{K(b-a)} - 1}{K}$$

On suppose :

1. f continue de $[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
2. f lipchitzienne en y
3. f de classe C^1 sur Ω

et on pose :

$$N(t) = \frac{1}{2}\max_{t\in[a,b]}|y''(t)|.$$

Alors

$$|e_n| \le hN(t_n)\frac{e^{K(t_n-a)}-1}{K}$$

pour $n = 0, 1, ..., N$

6 MÉTHODE DE RUNGE-KUTTA

Les algorithmes de Runge-Kutta (RK) consistent à calculer à chaque pas des valeurs intermédiaires. La méthode (RK) classique est donnée par le schéma suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} y_1 = y_n + hF(t_n, y_n; h) & \\ y_0 = \eta & \\ \text{avec} \quad F(t,y;h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) & \\ \text{où} \quad k_1 = f(t,y) & k_2 = f(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t+\frac{h}{2}, y+h\frac{k_2}{2}); & k_4 = f(t+h, y+hk_3) \end{array}\right. \tag{6.1}$$

Remarque 228.

1. Les méthodes (RK) sont convergentes.
2. Elles ne nécessitent pas le calcul des dérivées successives de f.
3. Elles donnent de très bons résultats notamment pour la résolution des problèmes de Cauchy.

7 SERIE D'EXERCICES

Exercice 229. On considère l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{ll} y' & = 2y \\ y(0) & = 5 \end{array}\right.$$

1. Vérifier que la solution exacte est $y(t) = 5e^{2t}$.
2. Soit $h = \frac{1}{n}$, pour $i = 0, ..., n$, montrer que les approximations fournies par le schéma d'Euler peuvent s'écrire $y_i = 5(1+2h)^i$.
3. Représenter graphiquement l'erreur

$$e(h) = \max_{0\le i\le n}|y(t_i) - y_i|.$$

en fonction de h, en calculant $e(0.005), e(0.01), e(0.05), e(0.1), e(0.5)$.

4. Que pensez-vous de la relation $e(h) \approx Kh$, avec K une constante ?

Exercice 230. On considere le probleme d'equation differentielle

$$\begin{cases} y\prime & = & -11y \\ y(0) & = 2 \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation numériquement sur l'intervalle $[0,1]$, on se donne, pour chaque entier n, un pas $h = \frac{1}{n}$ et des noeuds $x_i = ih, i = 1, ..., n$.

1. En répétant le raisonnement de l'exercice précédent, on pourrait montrer que, l'application de la méthode d'Euler conduit aux approximations :

$$y_i = 2(1 - 11h)^i.$$

2. Représenter les approximations obtenues pour pour $h = 0.2, 0.1, 0.09, 0.1$.
   Indication : la solution de ce problème est de la forme $y = Ae^{at}$, où A et a sont faciles à calculer.

Exercice 231. On considere le problème d'équations différentielles

$$y\prime = 2t - 3y, \quad y(0) = 1.$$

1. Montrer que la solution exacte est donnée par :

$$y = -\frac{2}{9} + \frac{2}{3}t + \frac{11}{9}e^{-3t}.$$

2. Vérifier que les approximations obtenues en prenant $h = 0.25$ et la méthode de Taylor d'ordre 2 ou la méthode d'Euler modifiée, sont égales.
3. Ecrire la formule aux différentes $y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_i)$, obtenues par chacune des deux approches. Expliquer pourquoi, dans ce cas particulier, les deux formules coıncident.

Exercice 232. L'égalité suivante découle directement du theoreme fondamental du calcul

$$y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} y\prime(t)dt.$$

En appliquant la formule de Simpson à l'integrale, on obtient alors l'approximation

$$y(t+h) \approx y(t) + \frac{h}{6}(y\prime(t) + 4y\prime(t + \frac{h}{2}) + y\prime(t+h)).$$

Supposons que y soit solution de $y\prime = f(t, y)$, l'approximation précédente s'écrit

$$y(t+h) \approx y(t) + \frac{h}{6}(f(t, y(t)) + 4f(t + \frac{h}{2}) + f(t+h, y(t+h))).$$

a) En remplaçant $y(t + \frac{h}{2})$ et $y(t+h)$ par les approximations données par la formule d'Euler modifiée, déduire de l'équation précédente un schéma numérique à un pas du type

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(f(t_i, y_i) + 2\frac{h}{3}f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1) + \frac{h}{6}f(t_i + h, y_i + k_2)))$$

pour lequel on déterminera les coefficients k_1, k_2 en fonction de h , y_i et $f(t_i, y_i)$.

b) On considère le cas particulier

$$f(t, y) = -y + t + 1$$

, pour lequel la solution exacte est

$$y(t) = t + e^{-t}.$$

En vous inspirant des exemples donnés et en choisissant $t_0 = 0$,$x_n = 1$,$y_0 = 1$, calculer

$$e(h) = \max|y_i - y(t_i)||i = 1, ...n \text{pour} n = 2, 4, 8, 16$$

. Reporter cette fonction sur un graphe log−log et en déduire l'ordre de la méthode.

Exercice 233. On considère le problème

$$\begin{cases} y\prime & = & \frac{-3y}{t^2} \\ y(1) & = 2e^3 \end{cases}$$

Comparer les approximations de la solution obtenues par la méthode d'Euler avec $h = 0.0016$ par la méthode du point milieu avec $h = 0.04$ et par la méthode de Runge-Kutta 4 avec $h = 0.2$. La comparaison se fera sur la base de la précision et du cout de calcul, i.e. le nombre de fois qu'il faut évaluer $f(t,y)$.