CHAPITRE

6 RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE

1 METHODES DIRECTES

1.1 Rappel

1.1.1 Rang d'une matrice

Définition 166. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de m lignes et de n colonnes. Le rang de A est égal au nombre maximum de colonnes de A linéairement indépendant et on le note :

$$rang\ A$$

Le rang de A est donc aussi égal à la dimension de l'image de toute application linéaire représenté par A.

Proposition 167. - $rang\ A = rang\ A^t$ - si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ alors $rang\ A \leq \inf(m,n)$ - si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors A inversible $\Leftrightarrow rang\ A = n$.

Définition 168. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, on appelle matrice extraite de A une matrice obtenue par sélection de lignes et de colonnes. Par exemple si I (respectivement J) est un sous ensemble de $\{1,2,...m\}$ (respectivement $\{1,2,...n\}$) on définit une matrice extraite B de A par :

$$B = \left(a_{ij}\right)_{i\in I, j\in J}$$

Théorème 169. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de *rang* r alors :
- le rang de toute matrice extraite de A est inférieur ou égal à r,
- toute matrice carrée inversible extraite de A est d'ordre inf érieur ou égal à r,
- il existe une matrice carrée extraite de A d'ordre r qui est inversible.

1.2 Systèmes linéaires

Définition 170. On appelle système de m équations à n inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$ la famille d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1.1}$$

que l'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$Ax = b$$

où $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est une matrice donnée par ses éléments (a_{ij}), $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $b \in \mathbb{R}^m$ de composantes $(b_1, b_2, ..., b_m)$ et x le vecteur inconnu de composantes $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Remarque 171. Si $b = 0$, on dit que le système (1.1) est homogène. Dans le cas où $m < n$, on dit que le système est sous determiné et dans le cas où $n > m$ on parle d'un système sur determiné.

Théorème 172. Une condition suffisante pour que le système (1.1) admette au moins une solution est que $rang\ A = m$.

Corollaire 173. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, une condition nécessaire et suffisante pour que le système $Ax = b$ admette une solution unique est que A soit inversible. Autrement dit $\det A \neq 0$ (ou $rangA = n$). Le système (1.1) est alors dit système de Cramer.

1.3 Résolution d'un système triangulaire supérieur

Définition 174. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, A est dite triangulaire supérieure si :

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i > j$$

Dans ce cas le système $Ax = b$ est dit triangulaire supérieur.

Remarque 175. On ne traitera pas le cas des systèmes triangulaires inférieurs car la technique de résolution est identique.

Le système d'équations $Ax = b$ triangulaire supérieur a la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Théorème 176. Soit le système triangulaire supérieur $Ax = b$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée et $b \in \mathbb{R}^n$, si :

$$a_{kk} \neq 0, \quad \forall k \in [1, n]$$

alors le système admet une solution unique et cette solution x^* est telle que :

$$x_k^* = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j^*}{a_{kk}}, \quad k = \{n, n-1, ..., 1\} \tag{1.2}$$

Nous allons étudier les méthodes de résolution du système de n équations linéaires à n inconnues $Ax = b$, par les mé thodes directes. Nous entendons par méthodes directes des méthodes qui mènent à la solution en un nombre fini d'opérations élémentaires. Ces méthodes sont utilisées seulement si le nombre d'équations du système n'est pas trop élevé (généralement $n \leq 100$). La méthode de Cramer en est une, mais elle est numériquement inacceptable. Car sa mise en oeuvre demande le calcul de $n+1$ dé terminants et n divisions. Pour calculer chaque déterminant, nous devons effectuer $n!n$ multiplications et $n!-1$ additions soit un total de $(n+1)^2 n! - 1$ opé rations élémentaires Par exemple, pour $n = 5$ on obtient 4319 opérations élé mentaires. Pour $n = 10$ on obtient à peu près 4.10^8 opérations él émentaires Or, dans la pratique, nous aurons à résoudre des systèmes d'ordres $n = 100$, $n = 1000$ voire même plus. Il est donc impossible de r ésoudre de tels systèmes par la méthode de Cramer. Dans ce chapitre, nous présentons essentiellement la méthode d'é liminations successives de Gauss et son interprétation matricielle, laquelle débouche sur la méthode de Cholesky pour un système à matrice définie positive. Si la matrice A n'est plus triangulaire, nous sommes amenés à chercher une matrice M inversible telle que la matrice produit MA soit triangulaire. On résoudra alors le système :

$$MAx = Mb$$

par l'algorithme (1.2). Nous nous limitons bien entendu à des systèmes $Ax = b$ avec $detA \neq 0$.

2 Méthode de Gauss

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée donnée et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche x^* solution du système linéaire :

$$Ax = b$$

La méthode de Gauss consiste à construire un système é quivalent plus facile à résoudre (à matrice triangulaire supé rieure par exemple). Deux systèmes linéaires définis par deux matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $U \in M_n(\mathbb{R})$ sont dits équivalents si leurs solutions sont identiques.

Remarque 177. - Les transformations élémentaires suivantes appliquées à un système linéaire engendre un système linéaire équivalent : - Une équation peut être remplacée par cette même é quation à laquelle on ajoute ou on retranche un certain nombre de fois une autre ligne. - La multiplication d'une équation par une constante non nulle. - La permutation de deux lignes ou de deux colonnes.

La représentation d'un système linéaire peut se faire à travers une matrice de dimension $n.(n+1)$ appelé matrice augmentée. La matrice est noté $\tilde{A} = [A|b]$ et a pour forme gé nérale :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & | & b_n \end{pmatrix}$$

La résolution du système linéaire ayant pour matrice augmenté e $\tilde{A}$ peut se faire en appliquant des transformations élé mentaires permettant d'obtenir un système équivalent. L'objectif de l'algorithme de Gauss est la construction d'un système triangulaire supérieur équivalent, en annulant au fur et à mesure les termes en dessous de la diagonale.

Définition 178. On appelle pivot de la transformation, l'élément a_{kk} de la matrice utilisée pour annuler les termes a_{jk}, $j > k$. La ligne k est alors appelée ligne pivot.

Théorème 179. Soit un système linéaire défini par une matrice A d'ordre n et $b \in \mathbb{R}^n$. Si A est non singulière alors il existe une matrice U d'ordre n triangulaire supérieure et $y \in \mathbb{R}^n$ tels que $Ux = y$ soit équivalent à $Ax = b$. La résolution du système $Ax = b$ se fait ensuite par résolution du système triangulaire supérieur.

Démonstration. Construisons la matrice augmentée $\tilde{A}^{(1)} = \left[A^{(1)}|b^{(1)}\right]$

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

l'exposant indiquant le nombre de fois qu'une valeur a été stocké e à la location i, j donnée. La première étape de l'algorithme de Gauss est d'annuler l'ensemble des coefficients de la premi ère colonne en dessous de la diagonale. Cela s'obtient si $a_{11} \neq 0$ en réalisant la transformation suivante sur la ligne $i > 1$:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad j \in [1, n+1]$$

où $g_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, on obtient le système équivalent à l'étape 2 suivant donné par sa matrice augment ée :

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & | & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

les étapes suivantes consistent à refaire le même procédé pour les colonnes suivantes. Ainsi l'étape k consiste à éliminer l'inconnu x_k dans les équations $k+1,...,n$. Ce qui donne les formules suivantes définies pour les lignes $i = k+1,...,n$ en supposant que le $k^{ième}$ pivot $a_{kk}^{(k)} \neq 0$:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - g_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad j \in [k, n+1] \tag{2.1}$$

avec $g_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$. A la dernière étape c'est-à-dire à $k = n$, on obtient le syst ème équivalent suivant :

$$\tilde{A}^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1}^{(n-1)} & a_{n-1n}^{(n-1)} & \cdots & b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & | & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

la matrice U est donc définie comme étant la matrice $\tilde{A}^{(n)}$ et y le vecteur $b^{(n)}$. cqfd

Remarque 180. - La ligne i de la matrice $\tilde{A}^{(k)}$ n'est plus modifiée par l'algorithme dès lors que $i \leq k$. - A l'étape k, on pratique l'élimination sur une matrice de taille $n-k+1$ lignes et $n-k+2$ colonnes.

Remarque 181. Si lors de l'élimination l'élément $a_{kk}^{(k)}$ à l'é tape k est nul alors la ligne k ne peut pas être utilisée comme ligne pivot. Dans ce cas, on cherche une ligne $j > k$ telle $a_{jk}^{(k)} \neq 0$. Si une telle ligne existe, alors on permute la ligne j et la ligne k sinon le système n'admet pas de solution.

Remarque 182. Pour minimiser les erreurs d'arrondi, on choisit la valeur du pivot la plus grande en valeur absolue. Pour ce faire deux stratégie sont possibles :

1. La méthode dite à *pivot partiel* : Au $k^{ième}$ pas de l'élimination, on choisit comme ligne de pivot celle qui, parmi les $n-k+1$ restantes, a l'élément de module maximum en colonne et on permute dans $\tilde{A}^{(k)}$ la $k^{ième}$ ligne naturelle et celle qui réalise ce maximum.
2. La méthode dite à *pivot total* : Au $k^{ième}$ pas de l'élimination, on choisit comme pivot l'élément de plus grand module dans la matrice d'ordre $n-k+1$ restante. On permute donc dans $\tilde{A}^{(k)}$ la $k^{ième}$ colonne naturelle et celle du pivot, ce qui modifiera l'ordre des composantes du résultat. A la fin du processus, il ne faudra pas oublier de remettre dans l'ordre initial les composantes de la solution x.

2.1 Interprétation matricielle de la méthode de Gauss

Supposons que l'on puisse effectuer l'élimination sans permutation des lignes et des colonnes. Considérons alors les matrices

$$G^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & -g_{k+1k} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -g_{nk} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, ..., n-1$$

avec

$$g_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad \text{pour} \quad i = k+1, ..., n.$$

le système (2.1) peut se mettre sous la forme

$$\tilde{A}^{(k+1)} = G^{(k)}\tilde{A}^{(k)}$$

ce qui donne

$$\tilde{A}^{(n)} = G^{(n-1)}.G^{(n-2)}.G^{(n-3)}.....G^{(1)}.\tilde{A}^{(1)}$$

avec

$$\tilde{A}^{(n)} = \left[A^{(n)}|b^{(n)}\right]$$

Posons

$$\begin{array}{rcl} U & = & A^{(n)} \\ L & = & \left(G^{(n-1)}.G^{(n-2)}.G^{(n-3)}.....G^{(1)}\right)^{-1} \end{array}$$

U (pour Upper) est une matrice triangulaire supérieure et L (pour Lower) est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité . Donc nous avons écrit A sous la forme : $A = LU$ où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ g_{21} & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ g_{31} & g_{32} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ g_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1n-1}^{(n-1)} & a_{n-1n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

nous sommes donc amenés à résoudre successivement les deux syst èmes triangulaires :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ly & = & b \\ Ux & = & y \end{array} \right. \quad \text{où } y = b^{(n)}$$

3 Méthodes LU

La première phase de la méthode de Gauss consistait à transformer le système $Ax = b$ en un système triangulaire $Ux = y$ avec U une matrice triangulaire supérieure. Supposons qu'aucune permutation n'ait été effectuée, on peut alors montrer que U et y ont été obtenus à partir de A et b en les multipliant par une même matrice R triangulaire et inversible, c'est-à-dire

$$U = RA \quad \text{et} \quad y = Rb$$

on a donc $A = R^{-1}U$. Et si on pose $L = R^{-1}$et $U = R$, on peut donc dé composer A en un produit de matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U. La méthode de Gauss appartient donc à la classe des méthodes dites méthodes LU. Elles consistent à obtenir une décomposition de la matrice A du type LU et à résoudre le système triangulaire $Ly = b$ puis ensuite le système triangulaire $Ux = y$ (L et U étant supposé es inversibles).

$$Ax = b \Longleftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} Ly & = & b \\ Ux & = & y \end{array} \right.$$

3.1 Décomposition LU

Définition 183. Une matrice A non singulière, admet une factorisation triangulaire si il existe une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que :

$$A = LU$$

Théorème 184. Soit le système linéaire $Ax = b$, si au cours de l'élimination de Gauss de la matrice A, aucun pivot n'est nul alors il existe une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supé rieure telles que :

$$A = LU$$

si de plus on impose $l_{kk} = 1$ alors la factorisation est unique.

La matrice U s'obtient en appliquant la méthode de Gauss tandis que la matrice L s'écrit de la manière suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

où pour $i > 1$ on a $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$. Ainsi la matrice L est composée des facteurs multiplicatifs permettant d'annuler les éléments sous le pivot. Comme il existe des problèmes simples pour lesquelles un des pivots est nul, le théorème suivant permet d'étendre la factorisation LU à un cadre plus général.

Théorème 185. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A inversible puisse se factoriser sous la forme $A = LU$ est que $\det(A_k) \neq 0$, $\forall k = 1, 2, ...n-1$. Où $A_k = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,..,k \\ j=1,2,.......,k}}$.

Démonstration. 1) Si $A = LU$, $A_k = L_k U_k$ et si A est inversible, $\det U = \prod_{i=1}^{n} u_{ii} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(i)} \neq 0$. Donc $\det(A_k) = \det(L_k).\det(U_k) = \det(U_k) = \prod_{i=1}^{k} a_{ii}^{(i)} \neq 0$. 2) Supposons que $\det(A_k) \neq 0$ $\forall k = 1, 2, ..., n-1$. Celà est vrai en particulier pour $k = 1$, donc $a_{11}^{(1)} = \det(A_1)$ et la première étape de l'élimination de Gauss est possible. Par récurrence, si on a obtenu $A^{(k)}$ pour $k \leq n-1$

$$A^{(k)} = G^{(k-1)}.G^{(k-2)}.G^{(k-3)}.....G^{(1)}.A^{(1)}$$

alors $\det(A_k^{(k)}) = \det(G_k^{(k-1)})...\det(G_k^{(1)})\det(A^{(1)}) = \det(A^{(1)}) \neq 0$ $A_k^{(k)}$ étant triangulaire on a $\prod_{i=1}^{k} a_{ii}^{(i)} \neq 0$ donc $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, donc la $k^{ième}$ étape de l'élimination est possible. On obtiendra finalement A=LU. cqfd

Théorème 186 (méthode à pivot partiel). Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible, alors il existe une matrice de permutation P telle que les pivots de PA soient non nuls. Ainsi il existe deux matrices L et U telles que $PA = LU$.

Remarque 187. le système linéaire $Ax = b$ est équivalent au système $PAx = Pb$ et la résolution du système se fait selon les étapes suivantes :

1. Construire U, L et P,
1. Calculer Pb,
2. Résoudre $Ly = Pb$ (système triangulaire inférieur),
3. Résoudre $Ux = y$ (système triangulaire supérieur).

4 Méthode de Cholesky

Certains systèmes présentent des propriétés particuliè res. Les matrices associées à ces systèmes peuvent être sym ètriques, à bande, etc...La méthode de cholesky a pour but la r ésolution de systèmes linéaires pour lesquels la matrice associ ée est symétrique définie positive.

Définition 188 (Matrice symétrique). Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est symé trique si on a

$$A = A^t.$$

Définition 189 (Matrice définie positive). Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est définie positive si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq 0, \quad \langle Ax, x\rangle > 0$$

où $\langle .,.\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. C'est-à-dire :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

On définit la norme induite par :

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 190. Si A est une matrice symétrique définie positive alors :

1. $a_{ii} > 0$,
2. $a_{ij} < a_{ii}a_{jj} \quad \forall i \neq j$,
3. $\max_{j,k} \left|a_{jk}\right| < \max_i |a_{ii}|$.

Théorème 191. Si la matrice A est une matrice carrée définie positive alors elle est inversible.

Corollaire 192. Si la matrice A est une matrice carrée définie positive alors le système linéaire $Ax = b$ où $x, b \in \mathbb{R}^n$ admet une solution et une seule.

Théorème 193. Soit M une matrice carrée telle et non singulière alors la matrice $A = MM^t$ est symétrique définie positive.

Exemple 194. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$A = MM^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est définie positive.

4.1 Factorisation de Cholesky

Théorème 195. Soit A une matrice carrée d'ordre n symétrique définie positive, A peut alors se décomposer et de manière unique en

$$A = LL^t$$

où L est une matrice triangulaire inférieure avec des élé ments diagonaux positifs.

Ainsi ce théorème permet de déduire que la méthode de construction des matrices définies positives engendre en fait l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Si A est une matrice symétrique définie positive alors le systè me $Ax = b$ peut être décomposé en $LL^t x = b$ et ce système peut se résoudre en résolvant les systèmes triangulaires :

$$\begin{cases} Ly &= b \\ L^t x &= y \end{cases}$$

4.2 Algorithme de décomposition de Cholesky

Soit A une matrice symétrique définie positive alors on a $A = LL^t$. Pour résoudre le système

$$Ax = b \tag{4.1}$$

le théorème précédent nous permet d'écrire (4.1) sous la forme $LL^t x = b$ avec L une matrice triangulaire inférieure inversible. On est donc amené à résoudre

$$\begin{cases} Ly &= b \\ L^t x &= y \end{cases}$$

Le problème consiste donc à construire explicitement la matrice $L = (l_{ij})$ triangulaire inférieure telle que

$$A = LL^t \quad \text{où} \quad A = (a_{ij})$$

ce qui équivaut à

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk}, \quad j \leq i.$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

en remarquant que a_{ij} est le produit de la ligne i de L et la colonne j de L^t alors on a :

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{1k} = l_{i1} l_{11} + l_{i2} l_{12} + \cdots + l_{in} l_{1n} = l_{i1} l_{11}$$

en particulier pour $i = 1$, on a $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ (l_{11} est bien positif). la connaissance de l_{11} permet de construire la première colonne de la matrice L car :

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$$

En raisonnant de la même manière pour la deuxième colonne de L , on a :

$$a_{i2} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{2k} = l_{i1} l_{21} + l_{i2} l_{22}$$

en prenant $i = 2$ alors $a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2$. D'où l'on tire

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

ensuite on a :

$$l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1} l_{21}}{l_{22}} \qquad i = 3, 4, \ldots, n$$

On peut généraliser la procédure au calcul de la colonne j en supposant que les $(j-1)$ colonnes ont déjà été calculé e. Ainsi :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ij} l_{1j} = l_{ij} l_{j1} + l_{ij} l_{j2} + \cdots + l_{ik} l_{jk} + \cdots + l_{in} l_{jj}$$

et seul l_{ij} et l_{jj} ne sont pas connus. Si on pose $i = j$, on obtient :

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

et par conséquent

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}} \quad i > j \quad \begin{array}{rcl} j & = & 2, \ldots.., n \\ i & = & j+1, \ldots, n \end{array}$$

Remarque 196. La décomposition de A symétrique définie positive, sous la forme $A = LL^t$ est unique à une matrice diagonale unité près. C'est-à-dire si $A = LL^t = MM^t$, alors $M = DL$ avec D matrice diagonale telle que $d_{ii} = \pm 1$.

Remarque 197. La méthode de Cholesky permet de calculer $\det A$ par

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^2$$

5 SERIE D'EXERCICES

Exercice 198. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -3x_1 - x_2 & = & 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 15 \end{array} \right.$$

1. En appliquant les formules de Cramer.
2. En triangularisant la matrice du système associée par la méthode de Gauss.

Exercice 199. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 & = & 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 & = & 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

En appliquant le principe de triangularisation de Gauss.

Exercice 200. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & = & 2 \\ 5x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 14x_3 & = & 5 \end{array} \right.$$

1. Montrer que la matrice associée à ce système est définie positive.
2. Résoudre ce système en utilisant la méthode de Choleski.

Exercice 201. Soit les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 + 5x_2 & = & 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = & -2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 2 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 & = & -2 \end{array} \right.$$

Effectuer la résolution en mettant, si cela est possible, la matrice associée à chacun de ces deux systèmes, sous forme d'un produit de deux matrices triangulaires de structures différentes.