Chapitre

5

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES

1 RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES

Ce chapitre est consacré à quelques méthodes numériques de résolution des équations du type :

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

où l'application : $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est supposée suffisamment régulière (continue et dérivable) sur l'intervalle $[a,b]$.

C'est-à-dire que nous allons approcher les racines de cette équation (1.1) sur $[a,b]$.

L'équation (1.1) represente une multitude de problèmes (équations algèbriques (où f est un polynôme), trigonométriques, exponentielles...).

Le problème revient donc à trouver x vérifiant $f(x) = 0$ sans qu'on puisse déterminer x explicitement.

Une équation du type (1.1) recouvre beaucoup d'applications.

Comme exemples :

1. On veut déterminer le volume V d'un gaz à une temperature T et une pression P. L'équation d'état qui lie V,T et P est la suivante :

   $$(P + \alpha(\frac{n}{V})^2)(V - n\beta) = knT$$

   où α et β sont des coefficients qui dépendent de la nature du gaz, n le nombre de molécules contenues dans le volume V et k représente la constante de Boltzman. Il est nécessaire donc de résoudre une équation non linéaire où l'inconnue est V. Ce qui revient à trouver les racines de la fonction

   $$f(V) = (P + \alpha(\frac{n}{V})^2)(V - n\beta) - knT$$

   Il s'agit donc de résoudre une équation non linéaire dont on n'est pas capable de trouver une solution exacte.
2. Le lancement d'un projectile. Sa trajectoire est décrite (par la loi de Newton), par une fonction $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ qui doit satisfaire une équation du type

   $$\ddot{x} = F(t, \dot{x}, x).$$

   Où $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ est l'acceleration et $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ la vitesse du projectile. Chercher par exemple à savoir à quel moment le projectile retombe sur le sol revient à résoudre :

   $$x_2(t) = 0.$$

   Ainsi, si on dispose d'une méthode numérique pour estimer $x(t)$, on pourra utiliser les méthodes de ce chapitre pour résoudre

   $$x_2(t) = 0.$$

Puisqu'en général la solution d'une équation $f(x) = 0$ ne s'exprime pas par une formule, on ne peut espèrer trouver une solution exacte en un nombre fini d'étapes. Nous allons donc approcher les solutions avec une précision aussi bonne qu'on le souhaite.

Mathématiquement, cela signifie qu'on a une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de solutions approchées , c'est-à-dire telle que $x_n \to x^*$ où x^* est une racine de : $f(x^*) = 0$.

Avoir des méthodes pour obtenir des solutions de $f(x) = 0$ de manière approchée est intéressant mais, si on veut les appliquer à des problèmes réels, le temps qu'il faudra attendre pour obtenir la réponse est important.

Par exemple, en ce qui concerne le projectile heurtant le sol, le coût de calcul de $x(t)$ peut être relativement élevé et on voudrait donc que la méthode de résolution de $x_2(t) = 0$ converge en aussi peu d'étapes que possible. En effet, le résultat de ce calcul est peut-être utilisé pour prendre des décisions quant à la trajectoire ultérieure du projectile.

Cette vitesse de convergence s'exprime ici par le gain de précision qu'on gagne en passant de x_n à x_{n+1}.

On s'interesse d'abord aux méthodes de séparation des racines. Il s'agit de determiner des intervalles $[a_i, b_i]$ à l'interieur desquels $f(x)$ admet une racine et une seule.

Cette séparation des racines s'effectue en général :

1. Soit sur le graphe de la fonction $y = f(x)$.
2. Soit les graphes de $y_1 = f_1(x)$ et $y_2 = f_2(x)$, si on peut mettre $f(x) = 0$ sous la forme $f_1(x) - f_2(x) = 0$.
3. Soit en se basant sur le théoreme suivant :

Théorème 118. Pour a et b donnés :

— Si $f(a).f(b) < 0$ alors f admet au moins une racine dans $[a,b]$ si de plus $f'(x) \neq 0$ quelque soit $x \in [a,b]$, la racine est unique.

— Si $f(a).f(b) > 0$ alors f n'admet pas de racine dans $[a,b]$ ou $f(x)$ admet un nombre pair de racines dans $[a,b]$.

Apres avoir isolé une racine dans $[a,b]$, on peut en obtenir une approximation à l'aide de plusieurs méthodes numériques.

Nous allons décrire quelques unes de ces méthodes ci-dessous.

2 MÉTHODE DE BISSECTION OU DE DICHOTOMIE

Cette méthode permet à la fois de montrer l'existence d'une racine d'une fonction $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ et de l'estimer numériquement.

L'idée est : si f est continue et change de signe sur $[a,b]$, f s'annule en un certain point de $[a,b]$.

Définition 119. Choisissons un point quelconque $x_0 \in]a,b[$.

1- Si $f(x_0) = 0$, x_0 est la racine et on a fini.

Sinon, supposons par exemple que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

Soit x_0 milieu de $[a,b]$, la racine x^* supposée existante se trouve dans l'un des deux intervalles $[a, x_0]$, $[x_0, b]$, pour savoir lequel, on regarde les conditions du théorème ci-dessus.

2- Si $f(x_0) < 0$, alors il y a une racine dans $]x_0, b[$. On pose dans ce cas $a_1 = x_0$, $b_1 = b$

3- Sinon, $f(x_0) > 0$ et il doit y avoir une racine dans $]a, x_0[$. On pose $a_1 = a$, $b_1 = x_0$. On recommence la procédure en choisissant x_1 dans $[a_1, b_1]$ et ainsi de suite, ce qui donne une suite décroissante d'intervalles $[a_n, b_n]$ avec $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, ..., $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ contenant chacun une racine. Et qui verifient :

$$|a - x_n| \leqslant \left(\frac{b-a}{2^{n+1}}\right) \tag{2.1}$$

Remarque 120. L'équation (2.3) permet d'estimer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher x^* avec une précision donnée ε .

En effet, si on veut savoir à partir de quel n on a $|x_n - x^*| \leq \varepsilon$, il suffit de chercher n tel que $(1/2^n)|b-a| \leq \varepsilon$. C'est-à-dire $n \geq log_2(|b-a|/\xi)$ où ξ dénote le plus petit entier supérieur ou égal à ε .

Pour que a_n et b_n soient de bonnes approximations d'une racine x^* : $a_n \leqslant x^* \leqslant b_n$ et $a_n \to x^*, b_n \to x^*$. Il faut que la longueur de l'intervalle $[a_n, b_n]$ tende vers 0.

Le théorème donnant le résultat s'énonce comme suit :

Théorème 121. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a).f(b) < 0$, la fonction f possède au moins une racine dans $]a,b[$. De plus, si on définit par récurrence $[a_0, b_0] = [a, b]$,

$$x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \text{ et } [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, x_n] & \text{si} \quad f(a_n)f(x_n) < 0, \\ [x_n, x_n] \quad = \{x_n\} & \text{si} \quad f(x_n) = 0, \\ [x_n, b_n] & \text{si} \quad f(x_n)f(b_n) < 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

les trois suites (a_n), (b_n) et (x_n) convergent linéairement vers la même limite x^* avec $f(x^*) = 0$.

Démonstration. On suppose $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Sinon on remplace f par $-f$.

Montrons par récurrence que $[a_n, b_n]$ est bien défini et que $f\ (a_n)\ f\ (b_n) < 0$ sauf si $a_n = b_n$ dans ce cas $f(a_n) = f(b_n) = 0$.

- Le cas $n = 0$ est trivial.

Supposons que la formule soit vraie pour n et montrons la pour $n+1$.

Soit $a_n = b_n$ sont racines et alors $a_{n+1} = b_{n+1} = a_n$ sont aussi racines. Soit $a_n \neq b_n$ et $f(a_n).f(b_n) < 0$, ce qui implique que

- si $f(a_n).f(x_n) < 0$ ou $f(x_n).f(b_n) < 0$, $a_{n+1} \neq b_{n+1}$ et $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$;

- sinon, $f(a_n).f(x_n) \geq 0$ et $f(x_n).f(b_n) \geq 0$ d'où on déduit que $f(x_n) = 0$ et que $a_{n+1} = b_{n+1} = x_n$ sont des racines de f .

il est facile de constater que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \quad \text{et} \quad |b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n|.$$

Cela implique que la suite (x_n) est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{1}{2n} \to 0$, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow (1/2n)|b_0 - a_0| \leq \varepsilon$.

Pour les $m \geq n \geq n_0$, on a $x_m \in [a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$ et alors

$$|x_m - x_n| \leq |b_n - a_n| \leq \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| \leq \ldots \leq \frac{1}{2^n}|a_0 - b_0| \leq \varepsilon$$

La suite (x_n) est donc bien de Cauchy.

Par conséquent, il existe un $x^* \in [a,b]$ tel que $x_n \to x^*$.

En outre, comme $|x_n - a_n| \leq |b_n - a_n| \to_{n\to\infty} n_0$ et $|b_n - x_n| \leq |b_n - a_n| \to_{n\to\infty} n_0$, il est facile de montrer que (a_n) et (b_n) convergent aussi vers x^*. Puisque $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ pour tout n, on en déduit en passant à la limite sur n et en utilisant la continuité de f que $f(x^*)^2 \leq 0$, c'est-à-dire $f(x^*) = 0$.

Nous avons montré que f possède une racine (x^*) et que les suites (a_n), (b_n) et (x_n) convergent toutes trois vers x^* .

Cette convergence est linéaire. Nous allons le voir pour (x_n), (il en est de même pour (a_n) et (b_n)).

Comme $(x_m)_{m\geq n} \subseteq [a_n, b_n]$ et que $x_m \to x^*$, on a $x \in [a_n, b_n]$. En conséquence

$$|x_n - x^*| \leq |b_n - a_n| \leq \frac{1}{2^n}|b_0 - a_0| \tag{2.3}$$

où $c = 1/2 \in]0,1[$. cqfd

3 MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES (du type $x_{n+1} = F(x_n)$)

Remarque 122. L'équation (1.1) peut toujours se mettre sous la forme

$$x = F(x) \tag{3.1}$$

Il suffit par exemple de poser : $F(x) = x + f(x)$.

Définition 123. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.
Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $F(x) = x$, on dit que x est un point fixe de F.

Après avoir isolé une racine dans l'intervalle $[a, b]$, on peut utiliser la proposition suivante pour l'approcher :

Proposition 124. : Soit $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \longmapsto [a, b] \subset \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de rapport k avec $0 < k < 1$ (on dit dans ce cas, strictement contractante). C'est-à-dire :

$$\forall x, y \in [a, b], |F(x) - F(y)| \leq k|x - y| \tag{3.2}$$

Alors la suite définie par :

$$x_{n+1} = F(x_n), \forall x_0 \in [a, b] \tag{3.3}$$

converge vers la racine x^* quand n tend vers l'infini.
De plus on a l'estimation de l'erreur comme suit :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \tag{3.4}$$

Remarques :

Remarque 125. La condition strictement contractante peut être remplacée par :

$$|F'(x)| < 1, \forall x \in [a, b] \tag{3.5}$$

Remarque 126. Si $0 \leq F'(x) < 1$, la suite (x_n) converge vers x^* de façon monotone.

Remarque 127. Si $-1 < F'(x) \leq 0$, la suite (x_n) converge vers x^* alternativement par excès et par defaut.

Remarque 128. Si $|F'(x)| > 1$, la suite (x_n) diverge.

Remarque 129. L'écriture de l'équation (1.1) sous une forme (3.1) quelconque n'est pas unique et ne donne pas toujours une méthode convergente, en effet :
Si on cherche la racine de $\tan x - x = 0$ pour $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, on écrit soit :

1. $x = \tan x$ c'est-à-dire :

$$F_1(x) = \tan x$$

2. soit $x = \pi + \arctan x$ c'est-à-dire :

$$F_2(x) = \pi + \arctan x$$

On obtient :

$$F_2'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

et $|F_2'(x)| < 1$, la méthode converge. Mais $F_1'(x) = 1 + \tan^2 x$ et $|F_1'(x)| > 1$, la méthode diverge.

Remarque 130. Si on cherche les deux racines de l'équation $x^2 - 6x + 8 = 0$ qui sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$, on peut écrire :

1. Soit
$$x = \frac{x^2+8}{6}$$
c'est-à-dire :
$$F_1(x) = \frac{x^2+8}{6}$$

2. Ou bien
$$x = \sqrt{6x-8}$$
c'est-à-dire :
$$F_2(x) = \sqrt{6x-8}$$
On obtient :
$$F_1'(x) = \frac{1}{3}x$$
donc
$$|F_1'(x)| < 1, \text{ seulement si } |x| < 3 \tag{3.6}$$
et
$$F_2'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x-8}}$$
donc
$$|F_2'(x)| < 1, \text{ seulement si } x > \frac{17}{6} \tag{3.7}$$

Pour l'équation $x = F_1(x)$ on prendra l'intervalle $[0;3]$ ce qui donnera la racine $x^* = 2$, et pour l'équation $x = F_2(x)$ on prendra l'intervalle $[3;5]$ ce qui donnera la racine $x^* = 4$.

4 MÉTHODE DU TYPE $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$

On peut écrire ces algorithmes sous la forme (3.1) avec : $F(x) = x - \frac{f(x)}{g(x)}$

Donc si $|F'(x)| < 1, \forall x \in [a,b]$ ce qui veut dire : $|1 - \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} F'(x)| < 1$, le schéma : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ converge vers la solution x^* de (1.1) pour x_0 convenablement choisi.

4.1 Méthode de la sécante

Soit c un point de $[a,b]$ tel que $f(c) \neq 0$. On choisit un point initial x_0 tel que $f(x_0).f(c) < 0$. La corde (ou sécante) joignant les points $M_c = (c, f(c))$ et $M_{x_0} = (x_0, f(x_0))$ coupe l'axe des x en un point dont l'abscisse est notée x_1. Et on recommence la procédure avec M_c et $M_1 = (x_1, f(x_1))$. Et ainsi de suite.

On obtient une suite (x_n) définie par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(c)}(x_n - c) = F(x_n).$$

La convergence vers la solution x^* de (1.1) est assurée par un choix convenable de c tel que $|F'(x)| < 1$ dans un voisinage contenant les points (x_n) d'itération.

Remarque 131. Si $f''(x) > 0$ sur $[a,b]$, alors si le point c est tel que $f(c) > 0$, la suite (x_n) est monotone convergente vers la solution x^*, par excès si $f'(x) < 0$ sur $[a,b]$, par défaut si $f'(x) > 0$ sur $[a,b]$.

Si $f''(x) > 0$ sur $[a,b]$, alors si le point c est tel que $f(c) < 0$, la suite (x_n) est monotone convergente vers la solution x^*, par excès si $f'(x) > 0$ sur $[a,b]$, par défaut si $f'(x) < 0$ sur $[a,b]$.

4.2 Méthode de la fausse position ou de Régula-falsi

On peut améliorer la convergence de la méthode de la bissection en s'inspirant de la méthode de dichotomie. L'idée est, au lieu de prendre pour x_n le point milieu de $[a_n, b_n]$, il vaudrait peut-être mieux choisir x_n comme l'intersection du segment de droite joignant $(a_n, f(a_n))$ et $(b_n, f(b_n))$ avec l'axe des "x" : $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Cela donne la formule :

$$x_n = a_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} f(a_n).$$

On peut espérer ainsi que x_n converge plus vite vers x^* . Le désavantage de ce choix est que nous aurons besoin de plus d'hypothèses sur f pour montrer cette convergence.

Théorème 132. Soit $f \in C([a,b];\mathbb{R}) \cap C^1(]a,b[;\mathbb{R})$ une fonction convexe ou concave et $f(a)f(b) < 0$. Définissons a_n, b_n, x_n par la récurrence suivante : $a_0 = a, b_0 = b$ et

$$x_n = a_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} f(a_n), \qquad [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, x_n] & \text{si} \quad f(a_n)f(x_n) < 0, \\ [x_n, b_n] & \text{si} \quad f(x_n)f(b_n) < 0, \end{cases} . \tag{4.1}$$

Alors, soit il existe un n tel que $f(x_n) = 0$, soit x_n est bien défini pour tout n et x_n converge à l'ordre 1 vers x^* où x^* est l'unique racine de f dans $[a,b]$.

Cette méthode dite de Regula -Falsi converge dans les mêmes conditions que la méthode de la sécante et en général plus vite.

4.3 Méthode de la tangente ou Méthode de Newton

Soit x_0 un point de $[a,b]$. La tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $M_0 = (x_0, f(x_0))$ coupe l'axe des x en un point d'abscisses x_1. En itérant le procédé, on obtient une suite d'abscisses (x_n) définie par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = F(x_n)$$

La méthode de Newton peut être vue comme un cas limite de la méthode de la sécante où les deux points x_{n-1} et x_n sont tellement proches que $(f(x_n) - f(x_{n-1}))/(x_n - x_{n-1})$ se confond avec $f'(x_n)$. Ainsi on obtiendra x_{n+1} à partir de x_n en regardant l'intersection de la tangente f au point x_n avec l'axe des x. Comme cette tangente est constituée de l'ensemble des points (x,y) tels que

$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ et que le point recherché est du type $(x_{n+1}, 0)$. Au voisinage de la racine, cette méthode converge plus vite que la méthode de la sécante. et $x_n \to x^*$ à l'ordre 2.

La condition $|F'(x)| < 1$ dans un voisinage contenant les points (x_n) d'itération est en général satisfaite car :

$$F'(x^*) = \frac{f(x^*).f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0$$

Posons dans le voisinage contenant les points (x_n) d'itération, M=sup$|f''(x^*)|$ et m=inf$|f'(x^*)|$. La formule de Taylor dans ce voisinage contenant les points (x_n) d'itération donne l'estimation de l'erreur pour une itération

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M}{m} |x_{n-1} - x^*|^2$$

Ce qui donne

$$|x_n - x^*| \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{2^n - 1} |x_0 - x^*|^{2^n}$$

Remarque 133. Lorsque la méthode converge, suivant le signe de $f''(x)$, nous avons :

1. $f''(x) > 0$, si $f'(x) > 0$ sur $[a, b]$ (respectivement $f'(x) < 0$) , alors la suite (x_n) est monotone convergente vers la solution x^*, par excès (respectivement par défaut).
2. $f''(x) < 0$, si $f'(x) < 0$ sur $[a, b]$ (respectivement $f'(x) > 0$) , alors la suite (x_n) est monotone convergente vers la solution x^*, par excès (respectivement par défaut).

Remarque 134.

1. Quelques faiblesses de la méthode de Newton lorsqu'on travaille sur de trop grands voisinages de la racine x^* .

   Soit $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$. Cette fonction possède une racine simple unique : $x^* = 0$.
   La méthode de Newton s'écrit :

   $$x_0 \in [-\pi/2, \pi/2], \qquad x_{n+1} = x_n - \tan x_n, \qquad n \geq 0$$

   Choisissons $x_0 = \alpha$ où α est la racine strictement positive de $\tan x = 2x$.
   Dans ce cas,

   $$x_1 = x_0 - \tan x_0 = \alpha - 2\alpha = -\alpha$$

   et

   $$x_2 = x_1 - \tan x_1 = -\alpha - \tan(-\alpha) = -\alpha + \tan\alpha = -\alpha + 2\alpha = \alpha.$$

   On est revenu à x_0. !
   Ensuite le processus recommence :

   $$x_3 = -\alpha, \quad x_4 = \alpha, \quad x_5 = -\alpha, ...$$

   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alterne donc entre α et $-\alpha$.
   On dit que c'est une *orbite périodique* de période 2 ou un *cycle d'ordre deux*. En conséquence (x_n) ne converge pas vers 0. Cela met en évidence qu'on doit partir suffisament près de la racine afin d'assurer la convergence de la méthode.
   Ici on peut montrer que, si $|x_0| < \alpha$, alors $x_n \to 0 = x^*$.

2. La méthode de Newton n'est pas nécessairement plus performante que les autres méthodes si on est trop loin de la racine. Il est donc important de determiner un intervalle $[a, b]$, contenant la racine x^*, le plus petit possible, de manière à ce que x_0 soit le plus proche possible de x^* . Sinon l'algorithme peut converger vers une autre racine ou même diverger.

5 MÉTHODE DU POINT FIXE

Si on regarde la méthode de Newton d'un point de vue abstrait, on voit qu'on obtient x_{n+1} à partir de x_n en évaluant toujours la même expression. Plus précisément, on a $x_{n+1} = F(x_n)$ avec $F(x) = x - f(x)/f'(x)$. Si $x_n \to x^*$, on déduit immédiatement de la continuité de F que $x^* = F(x^*)$. On dit alors que x^* est un *point fixe* de F. Or, il se fait que les points fixes de F correspondent aux racines simples de f .

Nous disposons maintenant d'un cadre pour rechercher de nouveaux algorithmes.

En effet, à toute fonction F dont les points fixes correspondent aux solutions du problème, on peut associer un schéma récursif $x_{n+1} = F(x_n)$.

Quelles sont donc les propriétés que F doit posséder pour être intéressante ? C'est-à-dire :

1. On doit avoir (x_n) convergente et sa limite x^* sera alors un point fixe de F ;
2. Et (x_n) doit tendre vers x^*aussi vite que possible et l'ordre de convergence doit être aussi élevé que possible.

Théorème 135. Soit $F : [a,b] \to [a,b]$ une fonction. On suppose qu'il existe une constante $K \in [0,1[$ telle que

$$\forall x,y \in [a,b], \qquad |F(x) - F(y)| \leq K|x-y|. \tag{5.1}$$

Alors, F possède un unique point fixe $x^* \in [a,b]$ et pour tout $x_0 \in [a,b]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 0 définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers x^* .

Remarque 136. Une fonction qui satisfait (5.1) pour $K \in [0,+\infty[$ est dite lipchitzienne. Lorsque $K < 1$, on dit que F est une contraction.

Remarque 137. Le plus petit K qui satisfait (5.1) (le K optimal) est appelé la constante de Lipschitz de la fonction F et se note $Lip(F)$. Ainsi

$$|(x)-(y)|Lip(F) = Lip_{[a,b]}(F) = sup_{x,y\in[a,b]x\neq y}\frac{|F(x)-F(y)|}{\left|x-y\right|}.$$

Remarque 138. Les fonctions qui satisfont (5.1) sont continues. L'inverse n'est pas vrai.

Remarque 139. Si $F \in C^1(]a,b[;\mathbb{R})$, on peut montrer grâce au théorème de la moyenne que

$$Lip(F) = sup_{x]a,b[}|F(x)|.$$

En conséquence, F sera une contraction si et seulement si $sup_{x\in]a,b[}|F'(x)| < 1$. Si de plus F est dérivable en a et b, il découle de la compacité de $[a,b]$ que F est une contraction si et seulement si, pour tout$x \in [a,b]$, $\quad |F'(x)| < 1$.

Remarque 140. Du point de vue de l'existence, l'intérêt de ce théorème est qu'il est valable en dimension supérieure à 1. En effet, en dimension 1, la continuité suffit. Notons cependant que, dans ce cas, la convergence des suites (x_n) n'est pas assurée et en fait n'a pas nécessairement lieu. Leur comportement peut d'ailleurs être fort complexe .

Le théorème (135) donne un critère pour la convergence des suites sur un intervalle $[a,b]$.Et on peut l'appliquer au voisinage d'un point fixe. On en conclut que pour tout $x_0 \in I_\varepsilon$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ converge bien vers x^* .

Remarque 141. Si $|F'(x^*)| < 1$, les suites qui entrent dans un petit voisinage de x^* convergent vers x^* . On dit que x^* est un point fixe *attractif*.

Si $|F'(x^*)| > 1$, même si une suite entre dans un petit voisinage de x^* , elle est forcée d'en ressortir. On dit de x^* que c'est un point fixe *répulsif*.

Si $|F'(x^*)| = 1$, on ne peut rien dire Les deux situations ci-dessus peuvent se produire. Ou aucune d'elles. Cependant on peut penser $|F'(x^*)| = 1$ comme une transition entre $|F'(x^*)| < 1$ et $|F'(x^*)| > 1$, c'est à dire entre un point fixe qui était attractif et devient répulsif. De telles situations sont communes et, typiquement, lorsque $|F'(x^*)| = 1$, une *bifurcation* a lieu.

Nous avons examiné la convergence – ou non – des suites vers un point fixe. Nous voudrions aussi connaitre la vitesse de convergence de x_n vers x^* . Globalement, le théorème (135) ne nous offre qu'une convergence linéaire. En effet, l'équation (5.1) implique

$$|x_{n+1} - x^*| = |F(x_n) - F(x^*)| \leq K|x_n - x^*|.$$

Lorsqu'on est suffisamment proche du point fixe x^*, la méthode de Newton est quadratique. En faisant un développement deTaylor avec reste de F au point x^*. On écrit

$$F(x) = F(x^*) + F(x^*)(x - x^*) + \cdots + \frac{F^{(k-1)}(x^*)}{(k-1)!}(x - x^*)^{k-1} + \frac{F'^{(k)}(\xi)}{k!}(x - x^*)^k$$

Et nous avons le théorème suivant :

Théorème 142. Sous les hypothèses du théorème (135), si de plus on a $F \in C^k(]a, b[; \mathbb{R})$ et $F'(x^*) = 0, \ldots, F^{(k-1)}(x^*) = 0$, alors (x_n) converge vers x^* à l'ordre k. Plus précisément, on a

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^k$$

où $c > |kF^{(k)}(x^*)|/k!$ peut être choisi arbitrairement proche de $|F^{(k)}(x^*)|/k!$.

6 SERIE D'EXERCICES

Exercice 143. Montrer en utilisant la propriété de valeur intermédiaire que toute fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ possède au moins un point fixe.

Exercice 144. Utiliser l'algorithme de dichotomie pour calculer à 0.01 près la racine de :

$$f(x) = e^x \sin x - 1$$

dans l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Exercice 145. En utilisant une méthode de convergence de la forme $x_{n+1} = F(x_n)$, trouver la racine à 0.01 près de :

$$f(x) = xe^x - 1 = 0$$

dans l'intervalle $[1/2, 1]$.

Exercice 146. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(x) = 0$ admet une racine réelle unique $x^* \in]0,1[$.
2. Déterminer par la méthode de dichotomie, une approximation de x^* à 10^{-1} près en utilisant le test d'arrêt $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$. Comparer le nombre d'itérations effectif pour avoir cette précision avec le nombre $N = (\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log 2}) = 3$.
3. Effectuer deux itérations avec la méthode de Newton en partant de $x_0 = 1$.

Exercice 147. En utilisant la méthode de Newton, chercher la racine à 0.001 près de l'équation :

$$f(x) = x^4 + x^2 + 2x - 1 = 0$$

dans l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 148. Trouver par la méthode de Newton, la racine positive minimale de l'équation :

$$\tan x = x$$

0.0001 près.

Exercice 149.

1. Trouver le nombre de racines réelles distinctes de :

$$P_3(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

2. Existent-t-ils des racines multiples ?

Exercice 150.

1. Trouver le nombre de racines réelles distinctes de :

$$P_3(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

2. Existent-t-ils des racines multiples ?

Exercice 151.

1. Trouver le nombre de racines réelles distinctes de :

$$P_3(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$$

2. Existent-t-ils des racines multiples ?

Exercice 152. Résoudre graphiquement l'équation cubique :

$$x^3 - 1.75x + 0.75 = 0$$

Exercice 153.

1. Trouver par la méthode de Krylov, le polynôme caractéristique de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Localiser les différentes valeurs propres.
3. Donner, par la méthode de Newton, une estimation de la valeur propre négative à 0.001 près.

Exercice 154. On considère la fonction $f(x) = 4 + 8x^2 - x^4$.

1. Combien f possède-t-elle de racines ? Si on décide d'utiliser la méthode de bissection, quelles sont les paires de points initiaux qu'on peut choisir pour obtenir chacune des racines ?
2. Si on opte pour la méthode de Newton, donner des intervalles autour de chacune des racines sur lesquels la méthode de Newton converge.

Exercice 155. L'équation $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ peut se réécrire sous la forme d'un point fixe des trois façons suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{10 - x^3}{4}} \\ x &= \varphi_2(x) = \frac{10}{x^2 + 4x} \\ x &= \varphi_3(x) = \sqrt{\frac{10}{x + 4}} \end{aligned}$$

1. Montrer que l'équation ci-dessus possède une unique racine (qui est positive) et donc que φ_i, $i = 1, 2, 3$, possèdent un seul point fixe.
2. Calculer les dix premières itérées des suites (x_n) définies par $x_{n+1} = \varphi_i(x_n)$ et $x_0 = 1$ pour $i = 1, 2, 3$. Qu'en déduire ?
3. Tracer les graphes des fonctions φ_i. Comment les comportements observés ci-dessus se voient-ils sur ces graphiques ? Observer également la vitesse de convergence.

Exercice 156. En mécanique céleste, le calcul des positions planétaires donne lieu à l'équation de Képler :

$$m = x - Esin(x)$$

où nous allons considérer les valeurs $m = 0,8$ et $E = 0,2$. Utilisez la méthode du point fixe pour résoudre cette équation en partant des valeurs initiales $x_0 = 1$, 0 et -1 respectivement.

7 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES

7.1 Résolution d'une équation algèbrique

Soit

$$P_x(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + ... + a_nx + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i}$$

un polynôme de degré inferieur ou égal à n.

On suppose que tous les coefficients a_i sont réels.

Il existe différentes méthodes pour chercher les racines de ce polynôme, c'est à dire chercher x qui vérifie

$$P(x) = 0$$

.

Nous allons donner quelques méthodes qui nous permettront de chercher les racines réels supposées existantes de ce polynôme.

7.2 Propriétés sur les racines d'un polynôme

Si $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ sont les n racines de $P_n(x) = 0$, on a les propriétés suivantes qui sont vérifiées (d'après le théorème de d'Alermbert).

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \sum_{i=1}^{n} x_i & = & -\frac{a_2}{a_1} & & \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i (\sum_{j=i+1}^{n} x_i) & = & \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} x_{i_1}x_{i_2} & = & \frac{a_3}{a_1} \\ .... & = & .... & & \\ \sum_{1\leq i_1<i_2<....<i_p\leq n} x_{i_1}x_{i_2}.....x_{i_{p-1}}x_{i_p} & = & (-1)^p \frac{a_{p+1}}{a_1} & & \\ .... & = & .... & & \\ x_1x_2.....x_{n-1}x_n & = & (-1)^n \frac{a_{n+1}}{a_1} & & \end{array}\right.$$

En posant $S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$, on obtient les relations dites de Newton :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_1S_1 + a_2 & = & 0 \\ a_1S_2 + a_2S_1 + 2a_3 & = & 0 \\ .... & = & .... \\ a_1S_n + a_2S_{n-1} + ... + a_nS_1 + na_{n+1} & = & 0 \end{array}\right.$$

7.3 Théorème de Sturm

Le théorème de Sturm permet de calculer le nombre de racines réelles distinctes d'un polynôme dans un intervalle donné.

7.3.1 Suite de Sturm

On se donne un polynôme $P = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$. La suite de Sturm (ou chaîne de Sturm à partir du polynôme P) est une suite finie de polynômes $P_0, P_1, ..., P_m$. Elle est construite par récurrence :
$P_0 = P$;
$P_1 = P\prime$, où P'est la dérivée de P, c'est-à-dire le polynôme $P' = nx^{n-1} + ... + a_1$;
Pour $i \geq 2$, P_i est l'opposée du reste de la division de P_{i-2} par P_{i-1}.
La construction s'arrête au dernier polynôme non nul.
Pour obtenir cette suite, on calcule les restes intermédiaires que l'on obtient en appliquant l'algorithme d'Euclide à P_0 et sa dérivée P_1 :

$$\begin{cases} P_0 & = & P_1Q_1 - P_2 \\ P_1 & = & P_2Q_2 - P_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m-2} & = & P_{m-1}Q_{m-1} - P_m \\ P_{m-1} & = & P_mQ_m \end{cases}$$

Si P possède uniquement des racines distinctes, le dernier terme est une constante non nulle. Si ce terme est nul, P admet des racines multiples, et on peut dans ce cas appliquer le théorème de Sturm en utilisant la suite $T_0, T_1, ..., T_{m-1}, 1$ que l'on obtient en divisant les $P_1, P_2, ..., P_{m-1}$ par P_m.

Et le nombre de racines réelles de $P_n(x) = 0$ supposées distinctes est donné donc par le théorème suivant :

Théorème 157 (Théorème de Sturm). Le nombre de racines réelles distinctes dans un intervalle $[a, b]$ d'un polynôme à coefficients réels, dont a et b ne sont pas des racines, est égal au nombre de changements de signe de la suite de Sturm aux bornes de cet intervalle.

Plus formellement, si nous notons $N(y)$ le nombre de changements de signe (zéro n'est pas compté comme un changement de signe) observés dans la suite $P(y), P_1(y), P_2(y), \ldots, P_m(y)$ alors le nombre de racines réelles distinctes de l'équation dans l'intervalle $[a, b]$ (où a et b ne sont pas des racines de P) est donné par $N = N(a) - N(b)$.

Remarque 158. Si l'equation $P_n(x) = 0$ admet une racine multiple, soit $(j+1)$ le premier indice tel que $P_{j+1}(x) = 0$. Les racines de $P_n(x) = 0$ seront alors les racines simples de $P_j(x) = 0$. Le nombre de racines distinctes est donné par le théorème de Sturm en arretant la suite $(p_n(y))$ au terme $p_i(y)$.

Exemple 159. Supposons que l'on souhaite connaître le nombre de racines dans un certain intervalle du polynôme $p(x) = x^4 + x^3 - x - 1$.

On commence par calculer les deux premiers termes.

$p_0(x) = p(x) = x^4 + x^3 - x - 1$

$p_1(x) = p\prime(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$ $\{\backslash\{\backslash begin\{aligned\} p\_\{0\}(x)\& = p(x) = x\hat{}\{4\} + x\hat{}\{3\} - x - 1\backslash\backslash p\_\{1\}(x)\& = p\prime(x) = 4x\hat{}\{3\} + 3x\hat{}\{2\} - 1\backslash end\{aligned\}\}\}$

En divisant p_0 par p_1 on obtient le reste $-\frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{15}{16}$, et en le multipliant par -1 on obtient $p^2(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{15}{/16}$. Ensuite, on divise p_1 par p_2 et en multipliant le reste par -1, on obtient $p_3(x) = -32x - 64$. Puis on divise p_2 par p_3 et en multipliant le reste par -1, on obtient $p_4(x) = -\frac{3}{16}$.

Finalement, la suite de Sturm du polynôme P est donc :

$p_0(x) = x^4 + x^3 - x - 1$

$p_1(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$

$p_2(x) = \frac{3}{16}x^2 + 34x + \frac{15}{16}$

$p_3(x) = -32x - 64$ $p_4(x) = -\frac{3}{16}$

Pour trouver le nombre de racines totales, c'est à dire entre $-\infty$ et $+\infty$, on évalue p_0, p_1, p_2, p_3, et p_4 en $-\infty$ et on note la séquence de signes correspondante :$+ - + + -$. Elle contient trois changements de signe ($+$ à $-$, puis $-$ à $+$, puis $+$ à $-$).

On fait la même chose en $+\infty$ et obtient la séquence de signes $+ + + - -$, qui contient juste un changement de signe. D'après le théorème de Sturm, le nombre total de racines du polynôme P est $3 - 1 = 2$. Nous pouvons faire une vérification en remarquant que $p(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ se factorise en$(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)$, où on voit que $x^2 - 1$ a deux racines (-1 et 1) alors que $x^2 + x + 1$ n'a pas de racines réelles.

Exemple 160. Soit $P_3(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Alors

$p_1(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
$p_2(x) = 3x^2 + 4x - 1$
$p_3(x) = 7x + 8$ (à un facteur multiplicatif positif près)
$p_4(x) = 81$ (à un facteur multiplicatif positif près)

Qu'on peut mettre sous forme du tableau suivant :

y	$p_1(y)$	$p_2(y)$	$p_3(y)$	$p_4(y)$	$N(y)$
-3	$-$	$+$	$-$	$+$	3
0	$-$	$-$	$+$	$+$	1
3	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Il y a donc $3-1 = 2$ racines réelles distinctes dans $[-3, 0]$
et $3-0 = 3$ racines réelles distinctes dans $[-3, 3]$

Exemple 161. Soit $P_6(x) = x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4$. Alors

$p_1(x) = x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4$.
$p_2(x) = 6x^5 + 20x^4 + 16x^3 - 2x - 4$
$p_3(x) = 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 14x + 16$
$p_4(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$p_5(x) = -17x^2 - 58x - 48$
$p_6(x) = -x - 2$
(Tous ces polynôme sont définis à un facteur multiplicatif positif près)
Qu'on peut mettre sous forme du tableau suivant :

y	$p_1(y)$	$p_2(y)$	$p_3(y)$	$p_4(y)$	$p_5(y)$	$p_6(y)$	$N(y)$
-3	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	4
-2	0	0	0	0	0	0	
-1	0	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	2
0	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	2
1	0	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	1
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	1
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	1

Il y a donc $3-1 = 2$ racines réelles négatives distinctes dans $[-3, 0]$, et une racine réelle distinctes dans $[0, 3]$. Comme $p_6(x) = -x - 2$ la valeur -2 est une racine double.

8 RÈSOLUTION DE SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Nous allons maintenant résoudre le système de m équations à m inconnues $x_1, x_2, ..., x_m$ de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1(x_1, x_2, ..., x_m) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_m) & = & 0 \\ .... & = & 0 \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_m) & = & 0 \end{array} \right. \tag{8.1}$$

Définition 162. Le système (8.1) peut toujours se mettre sous la forme :

$$F(x) = x \ , \ \ x \in \mathbb{R}^m \ , F : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^m$$

x est dit point fixe de $F(x)$.

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité d'un point fixe. Il nous permettra d'approcher les solutions de systèmes algébriques non linéaires.

Théorème 163 (du point fixe). Soit E un espace métrique complet non vide, $F : E \longmapsto E$ une contraction stricte. Alors F admet un point fixe et un seul donné par la méthode des approximations successives :

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

pour x_0 quelconque.

Démonstration. **1- Existence :** Soit la suite $(x_n) \in E$ définie par $x_{n+1} = F(x_n)$. Nous allons montrer que la suite (x_n) est de Cauchy.

Comme F est une contraction, nous avons :

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &\leq kd(x_1, x_0) \\ d(x_3, x_2) \leq kd(x_2, x_1) &\leq k^2 d(x_1, x_0) \\ \ldots\ldots\cdots &\leq \ldots\ldots\ldots \\ d(x_{n+1}, x_n) \leq kd(x_n, x_{n-1}) &\leq k^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$$
$$d(x_{n+p}, x_n) \leq k^n (k^{p-1} + k^{p-2} + k^{p-3} \cdots + k + 1) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Nous en déduisons que $d(x_{n+p}, x_n) \xrightarrow{0}$ quand $n \xrightarrow{+} \infty$. Donc la suite (x_n) est fde Cauchy et par suite admet une limite x et comme F est continue, $F(x_n)) \xrightarrow{x}$. On a donc $F(x) = x$.

2- **Unicité** Si x et y sont deux points fixes, on doit avoir

$$d(x,y) \leq kd(x,y) < d(x,y)$$

si $d(x,y) \neq 0$.

On a donc nécessairement $d(x,y) = 0$ et $x = y$.

cqfd

Proposition 164. Soit $F : E \longmapsto E$. Posons $F_2 = FoF$, $F_3 = FoFoF$, ...,$F_p = FoF_{p-1}$; F_p est appelée l'iterée d'ordre p de F. Nous avons alors le résultat suivant : Si l'une des iterées F_p est strictement contractante, alors F admet un point fixe unique.

Remarque 165.
1. Le procédé $x_{n+1} = F(x_n)$ est un algorithme permettant de trouver le point fixe de F. De plus la suite (x_n) converge rapidement vers x, car

$$d(x_n, x) = \lim_{p \longmapsto +\infty} d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

2. L'itérée F_p contraction stricte n'implique pas nécessairement que F soit continue ou contractante.
3. La condition $k < 1$ de contraction stricte, est indispensable. Car $k \leq 1$ ne suffit pas pour garantir ni l'existence ni l'unicité du point fixe.

8.1 Méthode des approximations successives (type Jacobi ou Gauss-Seidel)

L'équation

$$x = F(x); \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad F : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^m$$

peut s'écrire sous la forme :

$$A(x) = b; \quad x \in \mathbb{R}^m; \quad b \in \mathbb{R}^m; \quad A : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^m$$

ou bien sous la forme

$$x = B(x) + c; \quad c \in \mathbb{R}^m; \quad B : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^m$$

ou sous la forme d'un système de m équations :

$$x_i = B_i(x) + c_i; \quad i = 1, 2, ..., m$$

— S'il existe un domaine Ω convexe contenant x solution de $x = F(x)$ tel que

$$\forall x \in \Omega, \quad \sum_{j=1}^{m} |\frac{\partial B_i}{\partial x_i}| \leq d < 1; \quad i = 1, 2...., m$$

alors pour tout vecteur initial $x^{(0)}$ pris dans Ω, la suite de vecteurs $x^{(k)}$ définis par le schema itératif

$$x^{(k+1)} = B(x^{(k)}) + c \tag{8.2}$$

converge vers x d'après le théorème du point fixe. Le schema (8.2) s'appelle *"Methode de Jacobi non lineaire"*.

— Sous les mêmes hypothèses, la suite de vecteurs $x^{(k)}$ définis par le schema itératif :

$$x_i^{(k+1)} = B_i(x_1^{(k+1)}, ..., x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, ..., x_m^{(k)}) + c_i; \quad i = 1, 2, ..., m \tag{8.3}$$

converge vers x, d'après le théorème du point fixe.
Le schema (8.3) s'appelle *"Methode de Gauss-Seidel non lineaire"*.