Chapitre

4

INTEGRATION ET DÉRIVATION NUMÉRIQUE

1 INTÉGRATION NUMÉRIQUE

1.1 Méthode Générale

Lorsque l'intégrale définie d'une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ ne peut pas être évaluée analytiquement ou lorsque l'intégrale n'est pas donnée sous forme analytique mais numériquement en un certain nombre de valeurs discrètes, l'intégration numérique peut être utilisée.

Il existe plusieurs méthodes permettant d'évaluer les intégrales de fonctions bornées sur un intervalle $[a,b]$. La présence de singularité dans les fonctions (ou dans certaines fonctions) rend les calculs parfois difficiles.

Le problème de l'intégration numériqued'une fonction consiste à chercher la valeur de l'intégrale définie à partir de plusieurs valeurs de la fonction sous le signe somme. L'intégrale à évaluer étant :

$$I = \int_a^b f(x)dx. \tag{1.1}$$

L'intégration numérique consiste à remplacer l'intégrale (1.1) par une somme discrète sur un nombre fini de points :

$$I_N = \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i)$$

où a_i et x_i sont des variables à préciser.

Pour que l'avaluation numérique soit correcte, il est nécessaire d'imposer que toute méthode d'intégration vérifie :

$$\lim_{N\to\infty} I_N = I \tag{1.2}$$

Au delà de la vérification de ce critère, la qualité d'une méthode sera évaluée par la manière dont la convergence vers le résultat exact s'effectue.

Nous supposerons dorénavant que les fonctions sont de classe C^1(continues et à dérivées continues) sur $[a,b]$, mais aussi pour toute fonction f :

$$f'(x) < K \quad \forall x \in [a,b],$$

où K est une constante finie. Ce qui veut dire que la dérivée de f n'est pas singulière.sur $[a,b]$.

On se propose alors de chercher une approximation de I. On remplace f sur $[a,b]$ par une fonction d'interpolation φ (un polynôme par exemple) pour considérer :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

1.2 Approximation d'une intégrale

Soit ω une fonction positive définie sur $[c,d]$, on veut approcher

$$I = \int_c^d \omega(x)f(x)dx.$$

on suppose que f est connue en $(n+1)$ points $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$. On écrit

$$I = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) + R$$

où α_i seront choisi de telle sorte que R soit nul lorsque f est d'un type déterminé.

Lorsque f est quelconque, on suppose que

$$A = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i)$$

est une valeur approchée de I et R est suffisamment petit.

Soient $v_1, v_2, ..., v_{n+1}$ $(n+1)$ fonctions linéairement indépendantes continues sur $[a,b]$. On note $\mathcal{F}_n$ le sous espace engendré par ces fonctions. Pour que R soit nul, si $f \in \mathcal{F}_n$ on obtient :

$$I_k = \int_c^d \omega(x) v_k(x) dx = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_k(x_i); \quad k = 1, ..., n+1.$$

On suppose que les fonctions [1] $v_1, v_2, ..., v_{n+1}$ sont telles que le système admette une soultion unique.

Soit A_n la fonction d'interpolation de f dans $\mathcal{F}_n$ vérifiant :

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k v_k(x)$$

et

$$A_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., n+1.$$

nous avons

$$\int_c^d \omega(x) A_n(x) dx = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i A_n(x_i)$$

si

$$\varepsilon(x) = f(x) - A_n(x)$$

nous obtenons :

$$\int_c^d \omega(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) + \int_c^d \omega(x) \varepsilon(x) dx$$

Si la fonction d'interpolation $A_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de f, c'est-à-dire que :

$$\{v_1(x), v_2(x), ..., v_{n+1}(x)\} = \{1, x, ..., x^n\}$$

On choisira $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}\}$ de telle sorte que R soit nul quand f est un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à n.

1.3 Utilisation de l'interpolation polynomiale

Soit

$$A_n(x) = P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x) f(x_i)$$

avec

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

d'où

$$P = \int_c^d \omega(x) P_n(x) dx = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\int_c^d \omega(x) L_i(x) dx \right) f(x_i)$$

Remarque 80. Sous certaines conditions sur ω, $\{\alpha_i\}$ et $\{x_i\}$ P est une approximation de I.

Remarque 81. Les α_i sont indépendants de f, ils peuvent être calculés une bonne fois pour toute.

1. vérifient les conditions de Haar.

1.4 Etude de l'erreur d'intégration

Si f est $(n+1)$ fois continument dérivable sur $[a,b]$, on sait qu'il existe $\xi_x \in [a,b]$ tel que :

$$\varepsilon(x) = f(x) - A_n(x) = L(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

avec

$$L(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_j)$$

en intégrant on obtient :

$$R = I - P = \int_c^d \omega(x)L(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}dx$$

si $\omega(x)L(x)$ est de signe constant dans $[c,d]$ (en particulier si $[c,d]$ ne contient aucun des points d'interpolation, avec ω de signe constant sur $[c,d]$) le théorème de la moyenne donne :

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\int_c^d \omega(x)L(x)dx, \quad \eta \in [c,d]$$

si on connait une borne supérieure de $f^{(n+1)}$

$$M_{n+1} = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

on a

$$|R| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_c^d |\omega(x)L(x)|\,dx$$

1.5 Convergence des méthodes d'intégration

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et ω une fonction (poids) définie sur $[a,b]$ telle que

$$\int_c^d |\omega(x)|\,dx \leq M$$

on approche

$$I = \int_c^d \omega(x)f(x)dx$$

par

$$A = \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f(x_i)$$

où α_i et x_i sont à déterminer.

Problème 82. Savoir si en augmentant le nombre de points x_i, on obtiendrait une valeur de A de plus en plus proche de I. Plus précisemment a-t-on :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f(x_i) = \int_c^d \omega(x)f(x)dx?$$

La réponse n'est positive que sous certaines conditions sur $\{\alpha_i\}$ et $\{x_i\}$.

Théorème 83. Lorsque f est une fonction continue sur $[a, b]$ nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) = \int_c^d \omega(x) f(x) dx \tag{1.3}$$

si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. l'équation (1.3) est vrai pour un polynôme P quelconque
2. $\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i|$ est borné pour tout n.

Démonstration. Soit P un polynôme quelconque. Posons

$$\varepsilon_f(x) = \int_c^d \omega(x) f(x) dx - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i)$$

et

$$\varepsilon_P(x) = \int_c^d \omega(x) P(x) dx - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i P(x_i)$$

on donc

$$\varepsilon_f(x) = \int_c^d \omega(x) P(x) dx + \int_c^d \omega(x)(f(x) - P(x)) dx - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i P(x_i) + \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (f(x_i) - P(x_i))$$

ou

$$\varepsilon_f(x) = \varepsilon_P(x) + \int_c^d \omega(x)(f(x) - P(x)) dx - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (f(x_i) - P(x_i))$$

soit $\varepsilon > 0$ un nombre déstiné à tendre vers 0. D'après le théorème de Weirstrass [2] nous pouvons prendre un polynôme P tel que

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$$

nous avons alors

$$\left|\varepsilon_f(x)\right| \leq |\varepsilon_P(x)| + \varepsilon \int_c^d |\omega(x)| dx - \varepsilon \sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i|$$

c'est-à-dire

$$\left|\varepsilon_f(x)\right| \leq |\varepsilon_P(x)| + \varepsilon(M - \sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i|)$$

si $\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_P(x)| = 0$ pour tout polynôme P et si $\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i| \leq N$ pour tout n on a

$$\lim_{n\to\infty} \left|\varepsilon_f(x)\right| \leq \varepsilon(M + N)$$

cqfd

2. Si f est continue sur [a,b], il existe un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui approche f.

1.6 Formules de Newton Cotes

On suppose que f est connue en $(n+1)$ points $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ équidistants, et tels que :

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & a,\ x_2 = x_1 + h, \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i & = & x_{i-1} + h = a + (i-1)h \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+1} & = & x_n + h = a + nh \end{array}$$

on prend $\omega(x) = 1$, $\forall x \in [a, b]$.

On pose

$$\int_{x_{1-k}}^{x_{n+1+k}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) + R \tag{1.4}$$

— Si $k = 0$, on dit que la formule (1.4) est de type fermé.
— Si $k = 1$, on dit que la formule (1.4) est de type ouvert.

Les coefficients α_i sont donnés par

$$\alpha_i = \int_{x_{1-k}}^{x_{n+1+k}} L_i(x)dx$$

comme les x_i sont équidistants on peut poser $x = a + th$ et on a :

$$\alpha_i = \int_{x_{1-k}}^{x_{n+1+k}} l_i(t)dt$$

avec

$$l_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} \frac{t-j+1}{i-j}$$

Remarque 84.

$$\alpha_1 = \alpha_{n+1}; \alpha_2 = \alpha_n; \alpha_3 = \alpha_{n-1}; ....\text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = b - a + 2kn \tag{1.5}$$

Remarque 85. Les méthodes de Newton Cotes sont convergentes pour les polynômes mais ne le sont pas pour une fonction continue quelconque.

En effet si d'après l'équation (1.5) $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i$ est bien bornée, il n'en est pas de même de $\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i|$ car les α_i ne sont pas toujours de même.

En intégrant les formules d'interpolation on a :

1.7 Formule de type fermé : des trapèzes et de Simpson

1. $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$, $\xi \in [x_1, x_2]$ (*formule des trapèzes*)
2. $\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)) - \frac{h^5}{90} f''(\xi)$, $\xi \in [x_1, x_3]$ (*formule de Simpson*)
3. $\int_{x_1}^{x_4} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)) - \frac{3h^5}{80} f''(\xi)$, $\xi \in [x_1, x_4]$ (*formule de Newton*)

1.8 Formule de type ouvert :

1. $\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = 2hf(x_2) + \frac{h^3}{3} f''(\xi), \quad \xi \in [x_1, x_3]$ (*formule de Poncelet*)
2. $\int_{x_1}^{x_4} f(x)dx = \frac{3h}{2}(f(x_2) + f(x_3)) + \frac{3h^3}{4} f''(\xi), \quad \xi \in [x_1, x_4]$
3. $\int_{x_1}^{x_5} f(x)dx = \frac{4h}{3}(2f(x_2) - f(x_3) + 2f(x_4)) + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x_1, x_5]$
4. $\int_{x_1}^{x_6} f(x)dx = \frac{5h}{24}(11f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + 11f(x_5)) + \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x_1, x_6]$

Remarque 86. Les formules d'intégration données entre x_1 et x_2, x_3 ....peuvent être modifiées pour d'autres points d'interpolation.Exemple : $\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_2) + f(x_3)) - \frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [x_2, x_3]$
$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx = 2hf(x_3) + \frac{h^3}{3} f''(\xi), \quad \xi \in [x_2, x_4]$

1.9 Intégration par la méthode de Gauss

1.9.1 Polynôme de Legendre

Définition 87. On appelle polynômes de Legendre, les polynômes qui s'écrivent sous la forme :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left[(x^2 - 1)^n \right], \quad (n = 0, 1, ...)$$

Propriétés : Les polynômes de Legendre vérifient les propriétés suivantes :

1. $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n \quad (n = 0, 1, 2, ...)$.
2. $\int_{-1}^{1} P_n(x) Q_k(x) dx = 0, \quad (k < n)$, où $Q_k(x)$ est un polynôme de degré $k < n$.
3. Le polynôme de Legendre $P_n(x)$ possède n racines réelles distinctes dans $[-1, 1]$.

Exemple 88.

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned}$$

1.9.2 Formule de quadrature de Gauss

Soit $y = f(t)$ une fonction définie sur $[-1, 1]$.

Problème 89. Comment choisir $t_1, t_2, ..., t_n$ et $A_1, A_2, ...A_n$ pour que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \tag{1.6}$$

soit exacte pour tout polynôme $f(t)$ de degré N le plus grand.

Solution 90. Comme on a $2n$ constantes t_i et A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ alors que le polynôme de degré $2n-1$ est défini par $2n$ coefficients, ce degré maximal dans le cas général est $N = 2n - 1$.

Posant $\int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k \quad (k = 0, 1, ..., 2n-1)$ et $f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k$ alors

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i)$$

comme

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

pour résoudre le problème il suffit de déterminer t_i et A_i à partir du systéme non linéaire de $2n$ équations

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i & = & 2 \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-2} & = & \frac{2}{2n-1} \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} & = & 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Pour résoudre le système (1.7), on considère

$$f(t) = t^k P_n(t) \quad (k = 0, 1, ...n-1)$$

où $P_n(t)$ est le polynôme de Legendre.

Les degrés de ce polynôme ne dépassant pas $2n-1$, ces polynômes doivent vérifier :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i)$$

et

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) \quad (k = 0, 1, ...n-1)$$

comme

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) Q_k(x) dx = 0, \text{ pour } (k < n)$$

on

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(x) dx = 0, \text{ pour } (k < n)$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0 \quad (k = 0, 1, ...n-1) \tag{1.8}$$

si l'on pose $P_n(t_i) = 0$ pour $(i = 1, 2, ..., n)$ les égalités (1.8) sont vérifiées pour tout A_i.Si on connait t_i, on trouve à partir du système linéaire des n premières équations du système, les constantes A_i pour $(i = 1, 2, ..., n)$.

Remarque 91. La formule (1.8) où les t_i sont les racines du polynôme de Legendre $P_n(t)$ et où les A_i pour $(i = 1, 2, ..., n)$ sont définis à partir du système, s'appelle *formule de quadrature de Gauss*.

Exemple 92. Trouver la formule de quadrature de Gauss, dans le cas de trois ordonnées ($n = 3$).

Solution 93. Comme le polynôme de Legendre de degré 3 est le polynôme :

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

en l'annulant on obtient ses racines qui sont données par :

$$\begin{aligned} t_1 &= -\sqrt{\frac{3}{5}} \simeq -0,7745 \\ t_2 &= 0 \\ t_3 &= \sqrt{\frac{3}{5}} \simeq 0,7745 \end{aligned}$$

pour la détermination des coefficients A_i pour $(i = 1,2,3)$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} A_i & = & 2 \\ \sum_{i=1}^{3} A_i t_i & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{3} A_i t_i^2 & = & \frac{2}{3} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 & = & 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_3 & = & 0 \\ \frac{3}{5}A_1 + \frac{3}{5}A_3 & = & \frac{2}{3} \end{cases}$$

dont la solution est : $A_1 = A_3 = \frac{5}{9}$, $A_2 = \frac{8}{9}$.D'où :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{3} A_i f(t_i) = \frac{1}{9}\left[5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})\right]$$

1.10 Calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on fait le changement de variable suivant :

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

on obtient :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t)dt$$

en appliquant la formule de quadrature de Gauss on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

où

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i \quad (i = 1,2,...,n)$$

et où t_i sont les racines du polynôme de Legendre $P_n(t)$, c'est-à-dire $P_n(t_i) = 0$.

1.11 Erreur de l'intégration par la méthode de Gauss

Le reste de la formule de Lagrange à n points est donné par

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n-1}(n!)^4 f^{(4)}(\xi)}{(2n!)^3(2n+1)}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi) \\ R_3 &= \frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi) \end{aligned}$$

Exemple 94. Calculer par la méthode de quadrature de Gauss à trois ordonnées, l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \sqrt{1+2x}dx$$

Solution 95. Comme $a=0$ et $b=1$, d'après le changement de variable :

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i \quad (i=1,2,3)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}.(-\sqrt{\frac{3}{5}}) \simeq 0,112 \\ x_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}.0 \simeq 0,500 \\ x_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}.(\sqrt{\frac{3}{5}}) \simeq 0,887 \end{aligned}$$

donc les coefficients C_i sont :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{b-a}{2}A_1 = \frac{1}{2}.\frac{5}{9} \simeq 0,277 \\ C_2 &= \frac{b-a}{2}A_2 = \frac{1}{2}.\frac{8}{9} \simeq 0,444 \\ C_3 &= \frac{b-a}{2}A_3 = \frac{1}{2}.\frac{5}{9} \simeq 0,277 \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1+2x}dx = \sum_{i=1}^{3} C_i f(x_i) = 1,398$$

l'erreur commise dans le calcul de cette intégrale s'évalue de la manière suivante :

$$R_3 = \frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi) \text{ où } \xi \in [0,1]$$

comme $f^{(6)}(x) = -945(1+2x)^{\frac{-11}{2}}$ alors $\max_{x\in[0,1]}\left|f^{(6)}(x)\right| = 945$ donc

$$R_3 \leq \frac{945}{15750}(\frac{1}{2})^7 = 0,5.10^{-3}$$

2 SERIE D'EXERCICES

Exercice 96. 1. Soit f une fonction possédant 4 dérivées continues dans l'intervalle $[0,5]$, donner une évaluation de $\int_0^5 f(x)dx$ sachant que $x_1=1; x_2=2$ et $x_3=4$.

2. Soit g une fonction possédant 2 dérivées continues dans l'intervalle $[0,2]$, donner une évaluation de $\int_0^2 (x-1)g(x)dx$ sachant que $x_1=0; x_2=2$.

Exercice 97. 1. Dans l'intervalle $[a,b]$ on prend $x_1=a$, $x_2=a+h=b$, $f\in C^2[a,b]$, évaluer la formule des trapèzes $\int_a^b f(x)dx$.

2. On prend $x_1 = a$, $x_2 = a+h$, $x_3 = a+2h, \dots x_{n+1} = a+nh = b$, retrouver la formule des trapèzes généralisée.
3. Déduire la valeur approximative de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

pour $n = 6$.
4. Calculer la valeur exacte de cette intégrale et déterminer les erreurs absolues et relatives.

Exercice 98. On suppose que f est une fonction 3 fois continument dérivable dans $[-h,h]$ et $f^{(4)}(x)$ continue dans cet intervalle, f est donnée aux points : $x_1 = -h$, $x_2 = 0$, $x_3 = h$.

1. Etablir la formule suivante :

$$\int_{-h}^{x} f(t)dt = \frac{2x^3 - 3hx^2 + 5h^3}{12h^2} f(-h) - \frac{x^3 - 3h^2x - 2h^3}{3h^2} f(0) + \\ + \frac{2x^3 + 3hx^2 - h^3}{12h^2} f(h) + \varepsilon(x)$$

On donnera une expression de $\varepsilon(x)$.
2. On suppose que $x \in [-h, x]$:

a) Montrer que $\varepsilon(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{24}(x^2 - h^2)^2 f^{(3)}(\zeta),$$

avec $\zeta \in [-h,h]$.

b) Utiliser le résultat précédent pour donner une valeur approchée de :

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} \frac{dt}{1+t}$$

Quelle est la précision obtenue ?

Comparer ce résultat à celui que donnerait la formule des trapèzes utilisant les points $x_1 = -\frac{1}{4}$ et $x_2 = 0$.

Exercice 99. Déduire la formule de Gauss de la fonction f sur l'intervalle $[-1,1]$ pour le cas de trois ordonnées, on prendra pour la fonction poids $\omega(x) = 1$.

Exercice 100. 1. En utilisant la formule de Gauss à trois ordonnées, calculer l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx$$

2. En déduire $\int_0^1 \sqrt{1+2x}\, dx$.

3 DÉRIVATION NUMÉRIQUE

3.1 Généralités :

Pour résoudre un certain nombre de problèmes pratiques (étudier la vitesse d'un changement à l'intérieur d'un système par exemple), il est nécessaire parfois de calculer les dérivées d'une fonction $y = f(x)$ supposée dérivable mais connue de façon discrète sur un intervalle $[a, b]$, ou que l'expression analytique compliquée de cette fonction rende difficile sa dérivation.

Comment fournir une valeur approchée de la dérivée, d'ordre un ou supérieur, de $f(x)$ en un point de $[a, b]$.

Le principe est d'approcher la fonction à dériver par un polynôme d'interpolation $P_n(x)$ dont on calcule la dérivée ensuite, c'est-à-dire en posant :

$$f'(x) = P_n'(x)$$

Les dérivées d'ordre supérieur de $f(x)$ s'obtiennent de la même façon.

Si l'on connait l'erreur d'interpolation :

$$\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x)$$

l'erreur de la dérivée $P_n'(x)$ est donnée par :

$$r(x) = f'(x) - P_n'(x) = \varepsilon'(x)$$

Soit f une fonction numérique $y = f(x)$ dérivable (respectivement p fois dérivable), donnée aux points équidistants $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\} \subset [a, b]$ par

$$y_i = f(x_i)$$

Pour chercher sur $[a, b]$ la dérivée $y' = f'(x)$, (respectivement la dérivée d'ordre p c'est-à-dire $y^{(p)} = f^{(p)}(x)$)

Nous allons chercher la valeur de la dérivée sous la forme :

$$y^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x) f(x_i) + r(x)$$

les $\alpha_i(x)$ seront choisis de telle sorte que la fonction reste $r(x)$ soit nulle si f est d'un type déterminé (un polymôme).

Si f est quelconque et $r(x)$ suffisamment petit nous considérons que :

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x) f(x_i)$$

est une approximation de $f^{(p)}(x)$.

Soient $v_1, v_2, ..., v_{n+1}$ $(n+1)$ fonctions linéairement indépendantes p fois continument dérivables sur $[a, b]$. On note $\mathcal{F}_n$ le sous espace engendré par ces fonctions. Pour que $r(x)$ soit nul, il faut que les fonctions $v(x)$ vérifient

$$v^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x) v_k(x_i); \quad k = 1, ..., n+1.$$

On suppose que les fonctions[3] $v_1, v_2, ..., v_{n+1}$ sont telles que le système admette une soultion unique.

3. vérifient les conditions de Haar.

Soit P_n la fonction d'interpolation de f dans $\mathcal{F}_n$ vérifiant :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k v_k(x)$$

et

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., n+1.$$

nous avons

$$P_n^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x) P_n(x_i)$$

si

$$\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x)$$

nous obtenons :

$$f_n^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(x) f_n(x_i) + \varepsilon^{(p)}(x)$$

Remarque 101. Si la fonction d'interpolation $P_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de f, c'est-à-dire que :

$$\{v_1(x), v_2(x), ..., v_{n+1}(x)\} = \{1, x, ..., x^n\}$$

On choisira $\{\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_{n+1}(x)\}$ de telle sorte que $r(x)$ soit nul quand f est un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à n.

3.2 Utilisation de l'interpolation polynomiale

Nous pouvons remplacer la fonction f par son polynôme d'interpolation de Newton (par exemple)

$$\begin{aligned} y &= f(x) = y_1 + k\Delta y_1 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_1 + \cdots \\ &= y_1 + k\Delta y_1 + \frac{k^2-k}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{k^3-3k^2+2k}{6}\Delta^3 y_1 + \cdots \end{aligned}$$

Où

$$k = \frac{x - x_1}{h} \quad \text{et} \quad h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 1, 2, ...)$$

Comme

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dk}\frac{dk}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dk}$$

On obtient

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_1 + \frac{2k-1}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{3k^2-6k+2}{6}\Delta^3 y_1 + \cdots\right]$$

D'une façon analogue, comme

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dk}\frac{dk}{dx}$$

on a

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_1 + (k-1)\Delta^3 y_1 + \cdots\right]$$

Remarque 102. On procède de la même manière pour chercher les dérivées d'un ordre quelconque.

Remarque 103. Pour chercher les dérivées $y'(x), y''(x)$ en un point fixé x, il faut prendre comme x_1 la valeur tabulée de l'argument la plus proche de ce point x.

Remarque 104. Lorsqu'on cherche la valeur de la dérivée ou des dérivées de y aux points d'interpolation x_i, on peut considérer toute valeur tabulée comme étant une valeur initiale ; on a alors

$$y'(x_1) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y_1}{2} + \frac{\Delta^3 y_1}{3} - \frac{\Delta^4 y_1}{4} + \frac{\Delta^5 y_1}{5} - \cdots\right]$$

et

$$y''(x_1) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_1 - \frac{\Delta^3 y_1}{3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_1 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_1 + \cdots\right]$$

3.3 Erreur de dérivation

3.3.1 cas de $\varepsilon' = f' - P_n'$

Soit $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation de f. Nous avons

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x) f(x_i)$$

On sait que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi_x \in [a,b]$ tel que

$$\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\prod_{i=1}^{n+1}(x-x_i)\right) f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Par ailleurs $\varepsilon(x) = L(x)g(x)$ avec $L(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x-x_i)$ et $g(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$, en dérivant nous obtenons

$$\varepsilon'(x) = f'(x) - P_n'(x) = L'(x)g(x) + L(x)g'(x). \tag{3.1}$$

Le point x pour lequel nous cherchons une approximation peut être :
- soit l'un des points d'interpolation x_i.
- soit un point de $[a,b]$ différent de x_i pour tout i.

L'erreur commise ne sera pas la même dans les deux cas.

a) si $x = x_i$ dans ce cas $L(x_i) = 0$ et

$$L'(x_i) = \lim_{x \to x_i} \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(x-x_j)}{x-x_i} = \lim_{x \to x_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1}(x-x_j) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1}(x_i-x_j)$$

d'où

$$\varepsilon'(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1}(x_i-x_j)\right) f^{(n+1)}(\xi_{x_i})$$

b) si $x \neq x_i$ pour tout i, dans ce cas nous devons connaitre une estimation de $g'(x)$. Si f est $(n+2)$ fois continument dérivable, pour tout $x \in [a,b]$, il existe un élément η_x tel que

$$g'(x) = \frac{1}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta_x)$$

dans ce cas on a :

$$\varepsilon'(x) = \frac{1}{(n+1)!} L'(x) f^{(n+1)}(\xi_{x_i}) + \frac{1}{(n+2)!} L(x) f^{(n+2)}(\eta_x)$$

Si on connait des bornes de $f^{(n+1)}$ et $f^{(n+2)}$, c'est-à-dire si on note

$$M_p = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(p)}(x)\right|$$

nous avons alors

$$\left|\varepsilon'(x_i)\right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(x_i - x_j)$$

et

$$\left|\varepsilon'(x)\right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|L'(x)\right| + \frac{M_{n+2}}{(n+2)!}\left|L(x)\right| \quad \text{pour } x \in [a,b]\,; x \neq x_i\,; i = 1,2,...,n$$

Si $P_m(x)$ est un polynôme de Newton contenant les différences $\Delta y_1, \Delta^2 y_1, ..., \Delta^m y_1$ et si l'erreur correspondante est donnée par :

$$\varepsilon_m(x) = f(x) - P_m(x)$$

l'erreur de la dérivée s'écrit :

$$r(x) = \varepsilon_m'(x) = f'(x) - P_m'(x)$$

comme

$$\varepsilon_m(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi) = h^{m+1}\frac{k(k-1)\cdots(k-m)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)$$

où $\xi \in [x, x_m]$. En supposant que $f \in C^{(m+2)}$ on obtient :

$$r(x) = \frac{d\varepsilon_m(x)}{dk}\frac{dk}{dx} = \frac{h^m}{(m+1)!}\left[f^{(m+1)}(\xi)\frac{d}{dk}\left[k(k-1)\cdots(k-m)\right] + k(k-1)\cdots(k-m)\frac{d}{dk}f^{(m+1)}(\xi)\right] \tag{3.2}$$

en supposant $\frac{d}{dk}f^{(m+1)}(\xi)$ bornée et tenant compte du fait que $\frac{d}{dk}\left[k(k-1)\cdots(k-m)\right]_{k=0} = (-1)^m m!$, on en tire avec $x = x_1$ et par suite avec $k = 0$,

$$r(x) = (-1)^m \frac{h^m}{(m+1)} f^{(m+1)}(\xi) \tag{3.3}$$

Exemple 105. Calculer $y\prime(50)$ pour la fonction $y = f(x)$ donnée par le tableau suivant :

x	50	55	60	65
y	1,6990	1,7404	1,7782	1,8129

Solution 106. Formons le tableau des différences finies comme suit :

x	y	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
50	1,6990			
		0,0414		
55	1,7404		−0,0036	
		0,0378		0,0005
60	1,7782		−0,0031	
		0,0347		
65	1,8129			

3.3.2 cas de $\varepsilon^{(p)} = f^{(p)} - P_n^{(p)}$

En généralisant l'équation (3.1) on obtient :

$$\varepsilon^{(p)}(x) = \sum_{j=0}^{p} \mathbb{C}_p^j L^{(p-j)}(x) g^{(j)}(x) \tag{3.4}$$

en supposant que f soit $(n+1+p)$ continument dérivable, cette equation (3.4) s'écrit

$$\varepsilon^{(p)}(x)=\sum_{j=0}^{p}\mathrm{C}_p^j L^{(p-j)}(x)\frac{f^{(n+1+j)}(\xi_j)}{(n+1+j)!},\quad \xi_j\in[a,b]$$

en réecrivant autrement l'équation (3.2) on obtient :

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}f\left[x,x_1,...,x_{n+1}\right]=f\left[\underbrace{x,x,...x,}_{p+1\ fois}x_1,...,x_{n+1}\right]$$

on a :

$$\varepsilon^{(p)}(x)=\sum_{j=0}^{p}\mathrm{C}_p^j L^{(p-j)}(x)f\left[\underbrace{x,x,...x,}_{j+1\ fois}x_1,...,x_{n+1}\right]$$

lorsque les points sont équidisants c'est-à-dire si : $x_i=x_{i-1}+h=x_1+(i-1)h,\ i\geq 1$ et si nous posons : $x=x_1+th$, nous avons :

$$L_i(x)=l_i(t)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\frac{(t-j+1)}{i-j}$$

et

$$P_n(x)=p_n(t)=\sum_{i=1}^{n+1}l_i(t)f(x_i)$$

d'où

$$P_n'(x)=p_n'(t)=\sum_{i=1}^{n+1}l_i'(t)f(x_i)$$

et

$$P_n^{(p)}(x)=p_n^{(p)}(t)=\sum_{i=1}^{n+1}l_i^{(p)}(t)f(x_i)$$

Remarque 107. Les coefficients $l_i(t)$, $l_i'(t)$, $l_i^{(p)}(t)$ ne dépendant ni de h ni de x_1, peuvent être tabulés.

Exemple 108. Trouver l'extremum de la fonction donnée par le tableau suivant :

x	1,80	1,82	1,84	1,86	1,88	1,90
y	0,5815170	0,5817731	0,5818649	0,5817926	0,5815566	0,5811571

Solution 109. Le tableau des différences est donnée par le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,80	0,5815170			
		0,002561		
1,82	0,5817731		−0,001643	
		0,000918		0,000002
1,84	0,5818649		−0,001641	
		−0,000723		0,000004
1,86	0,5817926		−0,001637	
		−0,002360		0,000002
1,88	0,5815566		−0,001635	
		−0,003995		
1,90	0,5811571			

l'extremum est atteint pour $f'(x) = 0$ c'est-à-dire :

$$0 = \frac{0,000918 - 0,000723}{2} + k(-0,001641) + \frac{3k^2 - 1}{6}\frac{0,000002 + 0,000004}{2}$$

ou

$$0 = \frac{3}{2}k^2 - 1641k + 97$$

ou aussi

$$k = \frac{97}{1641} + \frac{1}{1094}k^2$$

ce qui donne $k = 0,05911$ d'où $x = x_1 + kh = 1,84 + 0,05911.0,02 = 1,8411822$.

3.4 Algorithmes de dérivation

Les formules de dérivation numériques déduites au paragraphe précédent pour la fonction $y = f(x)$ au point $x = x_1$ ont l'inconvenient de n'utiliser que des valeurs de la fonction pour $x > x_1$.

Les formules de dérivation qui tiennent compte des valeurs de $y = f(x)$ aussi bien pour $x > x_1$ que pour $x < x_1$ sont relativement plus exactes. Ces formules s'appellent *formules de dérivation par différences centrales*.

Soient $..., x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, ...$un système de points équidistants et numérotés symétriquement par rapport à x_0, à pas $x_{i+1} - x_i = h$ et $y_i = f(x_i)$ les valeurs correspondantes de $y = f(x)$. Si on pose

$$k = \frac{x - x_1}{h}$$

alors si le le polynôme d'interpolation est le polynôme de Stirling, on aura :

$$\begin{aligned} y \quad = \quad & f(x) = y_0 + k\Delta y_{-\frac{1}{2}} + \frac{k^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{k^2(k^2-1)}{3!}\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{k^2(k^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \\ & + \frac{k^2(k^2-1)(k^2-2^2)}{5!}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{k^2(k^2-1)(k^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \cdots \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$; $\Delta y_{-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2}$, $\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} = \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}$, $\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} = \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta y_{-2}}{2}$, etc...

En tenant compte de :

$$\frac{dk}{dx} = \frac{1}{h}$$

on obtient de la formule (3.5) :

$$\begin{aligned} y' \quad = \quad & f'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_{-\frac{1}{2}} + k\Delta^2 y_{-1} + \frac{3k^2-1}{6}\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{2k^2-k}{12}\Delta^4 y_{-2} + \\ & + \frac{5k^4 - 15k^2 + 4}{120}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{3k^5 - 10k^3 + 4k}{360}\Delta^6 y_{-3} + \cdots) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y'' \quad = \quad & f''(x) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} + k\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{6k^2-1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \\ & + \frac{2k^3 - 3k}{12}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{15k^4 - 30k^2 + 4}{360}\Delta^6 y_{-3} + \cdots) \end{aligned}$$

en particulier si k=0, on a :

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}(\Delta y_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{30}\Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \cdots) \tag{3.6}$$

et

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90}\Delta^6 y_{-3} + \cdots) \tag{3.7}$$

Exemple 110. Calculer la dérivée $y'(1)$ et la dérivée seconde $y''(1)$ de la fonction donnée par le tableau suivant :

x	$0,96$	$0,98$	$1,00$	$1,02$	$1,04$
y	$0,7825361$	$0,7739332$	$0,7651977$	$0,7563321$	$0,7473390$

Solution 111. En composant les différences de la fonction $y = f(x)$ on obtient :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$0,96$	$0,7825361$				
		$-0,086029$			
$0,98$	$0,7739332$		$-0,001326$		
		$-0,87355$		$0,000025$	
$1,00$	$0,7651977$		$-0,001301$		$0,000001$
		$-0,88656$		$0,000026$	
$1,02$	$0,7563321$		$-0,001275$		
		$-0,89931$			
$1,04$	$0,7473390$				

et en appliquant (3.6) on a :

$$\begin{aligned} y'(1) &= \frac{1}{0,02}(-\frac{87355+88656}{2}.10^{-7} - \frac{1}{6}.\frac{25+26}{2}.10^{-7} + \frac{1}{30}.1.10^{-7}) = \\ &= -50(88005,5+4,2+0).10^{-7} = -0,4400485. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y''(1) &= \frac{1}{0,02^2}(-1301.10^{-7} - \frac{1}{12}.1.10^{-7}) = \\ &= -2500.1301.10^{-7} = -0,325250. \end{aligned}$$

Remarque 112. Quand les points d'interpolation sont équidistants, les différences divisées sont remplacées par différences finies.

- On appelle *différences finies* d'ordre 1 *progressives*, notées $\nabla_h f$, la fonction définie par :

$$\nabla_h f(x) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$$

-On appelle *différences finies* d'ordre 1 *régressives*, notées $\bar{\nabla}_h f$, la fonction définie par :

$$\bar{\nabla}_h f(x) = \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h))$$

-On appelle *différences finies* d'ordre 1 *centrales*, notées $\delta_h f$, la fonction définie par :

$$\delta_h f(x) = \frac{1}{h}(f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2}))$$

- On définit les *différences finies* d'ordre k *progressives*, notées $\nabla_h^k f$, la fonction définie par :

$$\nabla_h^k f(x) = \nabla_h(\nabla_h^{k-1} f(x))$$

-On appelle *différences finies* d'ordre 1 *régressives*, notées $\bar{\nabla}_h^k f$, la fonction définie par :

$$\bar{\nabla}_h^k f(x) = \bar{\nabla}_h(\bar{\nabla}_h^{k-1} f(x))$$

-On appelle *différences finies* d'ordre 1 *centrales*, notées $\delta_h^k f$, la fonction définie par :

$$\delta_h^k f(x) = \delta_h(\delta_h^{k-1} f(x))$$

Remarque 113. On appelle différences non divisées le produit

$$\nabla^k = \nabla_h^k h^k$$

pour les différences non divisées progressives,

$$\bar{\nabla}^k = \bar{\nabla}_h^k h^k$$

pour les différences non divisées régressives, et

$$\delta^k = \delta_h^k h^k$$

pour les différences non divisées centrales.

3.5 Formules centrales de dérivation

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(f(x_1) - f(x_{-1})) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in [x_{-1}, x_1]$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}(f(x_{-2}) - 8f(x_{-1}) + 8f(x_1) - f(x_2)) + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in [x_{-2}, x_2]$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_{-1})) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x_{-1}, x_1]$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{24h^2}(-2f(x_{-2}) + 32f(x_{-1}) - 60f(x_0) + 32f(x_1) - 2f(x_2)) + \frac{h^4}{90} f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in [x_{-2}, x_2]$$

3.6 Formules non centrales de dérivation

$$f'(x_{-1}) = \frac{1}{2h}(-3f(x_{-1}) + 4f(x_0) - f(x_1)) - \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in [x_{-1}, x_1]$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}(f(x_{-1}) - 4f(x_0) + 3f(x_1)) + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in [x_{-1}, x_1]$$

$$f'(x_{-1}) = \frac{1}{12h}(-25f(x_2) + 48f(x_{-1}) - 36f(x_0) + 16f(x_1) - 3f(x_2)) + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in [x_{-2}, x_2]$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{12h}(-f(x_{-2}) + 6f(x_{-1}) - 18f(x_0) + 10f(x_1) + 3f(x_2)) - \frac{h^4}{20} f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in [x_{-2}, x_2]$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}(3f(x_{-2}) - 16f(x_{-1}) + 36f(x_0) - 48f(x_1) + 25f(x_2)) - \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in [x_{-2}, x_2]$$

4 SERIE D'EXERCICES

Exercice 114. Soit f une fonction possédant $(n+2)$ dérivées continues dans l'intervalle $[a,b]$, l'erreur d'interpolation polynomiale en $(n+1)$ points est donnée par :

$\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_{n+1})f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

1. Calculer $\epsilon'_n(x)$;
2. Donner une évaluation de $\epsilon'_n(x)$ en un point d'interpolation x_k;
3. Pour $n = 1, x_1 = a, x_2 = a+h$, calculer $p'_1(a)$ et $\epsilon'_1(a)$;
4. Pour $n = 2, x_1 = a, x_2 = a+h, x_3 = a+2h$, calculer $p'_2(a)$ et $\epsilon'_2(a)$.

Exercice 115. Calculer $y'(0,97)$ de la fonction $y = f(x)$ donnée par le tableau suivant :

x	0,96	0,98	1,00	1,02	1,04
y	0,7825361	0,7739332	0,7651977	0,7563321	0,7473390

Exercice 116. Calculer $y'(50)$ et $y''(50)$ de la fonction $y = \log(x)$ donnée par le tableau suivant :

x	50	55	60	65
y	1,6990	1,7404	1,7782	1,8129

Exercice 117.

1. Soit $f(x) = e^x$, on donne le tableau suivant :

x	0,4	0,6	0,7	1,0
y	1,491825	1,822119	2,013753	2,718282

2. Calculer $f'(0,8)$ et donner une majoration de l'erreur.
3. Calculer $f''(0,8)$ et donner une majoration de l'erreur.