Chapitre

3

INTERPOLATION POLYNOMIALE

1 GÉNERALITÉS

Le problème de l'interpolation peut se poser dans plusieurs situations. Par exemple :

1- Une fonction f n'est pas complètement définie. On connait simplement un nombre fini de ses valeurs sur un intervalle $[a,b]$, (par exemple des données expérimentales) $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ supposés tels que :

$$a < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} < b$$

et les valeurs de f en ces points

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n, f(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

On peut alors vouloir déterminer une fonction φ, définie sur tout l'intervalle $[a,b]$ et constituant une certaine *"approximation de f"* (dans un sens à préciser). Il est alors souhaitable que $\varphi(x)$ soit numériquement *facile à évaluer*

2- $f(x)$ est connu pour tout x, mais son évaluation numérique est complexe. On peut alors vouloir déterminer une fois pour toutes un nombre fini de valeurs

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(x_{n+1})$$

et pour tout

$$x \neq x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$$

approcher $f(x)$ en fonction de ces valeurs.

Cadre général de l'interpolation : *Chercher une fonction φ(appelé l'interpolant), d'un type préalablement choisi qui interpole f sur $[a,b]$, c'est déterminer cette fonction φ telle que*

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \tag{1.1}$$

Cela signifie d'un point de vue géométrique, qu'il faut trouver une courbe d'équation $y = \varphi(x)$ et d'un type donné passant par le système de points

$$M_i = (x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Le problème ainsi posé peut avoir une infinité de solutions ou ne pas avoir du tout de solution. Cependant, il admet une solution et une seule si l'on cherche non pas une fonction quelconque $\varphi(x)$ mais un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vé rifie (1.1) et est tel que :

$$P_n(x_1) = y_1, \quad P_n(x_2) = y_2, \dots\dots, P_n(x_{n+1}) = y_{n+1}.$$

Nous obtenons la formule d'interpolation :

$$y = \varphi(x).$$

Que nous utiliserons donc pour le calcul approché des valeurs de la fonction donnée $f(x)$ pour des valeurs de x différentes des points d'interpolation x_i, $i = 1, \dots n+1$.

Remarque 37. Si $x \notin [x_1; x_{n+1}]$ on parle d'une extrapolation.

Proposition 38. Si $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ sont $(n+1)$ points distincts de $\mathbb{R}$ et si $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ sont $(n+1)$ réels, alors il existe un et un seul polynôme réel P de degré inférieur ou égal à n tel que

$$P_n(x_1) = y_1, \quad P_n(x_2) = y_2, \dots\dots, P_n(x_{n+1}) = y_{n+1}.$$

Démonstration. Tout polynôme réel de degré inférieur ou égal à n s'écrit de manière unique sous la forme

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ de ces polynômes est donc un espace vectoriel réel de dimension $(n+1)$. L'application

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_{n+1}) \end{pmatrix}\end{array}$$

est linéaire et injective car un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui a $(n+1)$ zéros distincts est nul. Il s'ensuit que cette application est aussi surjective, d'où la conclusion. cqfd

Remarque 39. Pour trouver les coéfficients du polynôme $P_n(x)$ c'est-à -dire déterminer $a_0, a_1, ..., a_n$, il suffit de résoudre le système linéaire (de Cramer) suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

La matrice de ce système est une matrice de Vandermonde. Cependant, cette méthode de détermination des coefficients est peu efficace. On préfère des méthodes basées sur des formules explicites pour le polynôme $P_n(x)$ telles que les formules dites de Lagrange et de Newton établies ci-dessous.

2 POLYNOME DE LAGRANGE

Soit $\{x_1, x_2, ...x_{n+1}\}$, $(n+1)$ valeurs distinctes de $[a, b]$ données. On suppose que que l'on connaisse les valeurs correspondantes de $y = f(x)$ c'est-à-dire on a :

$$f(x_1) = y_1, \ f(x_2) = y_2, ...f(x_{n+1}) = y_{n+1}.$$

On veut construire un polynôme $L_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i(x) f(x_i)$, de degré inférieur ou égal à n, vérifiant :

$$L_n(x_i) = y_i, \ \ i = 1, 2, ...n+1.$$

où les fonctions $p_i(x)$ sont telles que :

$$p_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i \end{cases}$$

Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. **Résolution du problème :** Le polynôme à obtenir s'annulant en $(n+1)$ points $x_1, x_2..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}$, il s'ecrit donc :

$$p_i(x) = C_i(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n), \tag{2.1}$$

où C_i est une constante. Posant dans (2.1) $x = x_i$ et comme $p_i(x_i) = 1$, on a donc :

$$C_i(x_i-x_1)(x_i-x_2)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n) = 1$$

c'est-à-dire :

$$C_i = \frac{1}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

en portant cette valeur dans (2.1) on obtient :

$$p_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}. \tag{2.2}$$

Le polynôme $L_n(x)$ qui vérifie les conditions $L_n(x_i) = y_i$, est alors de la forme :

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i(x) y_i \tag{2.3}$$

En effet, d'une part le polynôme $L_n(x)$ ainsi construit est un polyn ôme de degré inférieur ou égal à n. Et d'autre part comme $p_i(x_j) = 1$ si $j = i$ et 0 sinon, on a :

$$L_n(x_j) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i(x_j) y_i = p_j(x_j) y_i = y_i \qquad j = 1, 2, ..., n+1$$

En portant la valeur de $p_i(x)$ dans (2.3) tirée de (2.2) on obtient :

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} y_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right) y_i. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le polynôme donné par (2.4) est appelé le *polynôme d'interpolation de Lagrange*. et

$$p_i(x_j) = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right) \tag{2.5}$$

sont appelés les *coeficients de Lagrange*.

Proposition 40. Le polynôme d'interpolation de Lagrange est unique.

Démonstration. Faisons un raisonnement par l'absurde. Soit $\check{L}_n(x)$ un polynôme de degré inférieur ou é gal à n, distinct de $L_n(x)$ et est tel que :

$$\check{L}_n(x) = y_i \qquad i = 1, 2, ..., n+1$$

Le polynôme

$$Q_n(x) = \check{L}_n(x) - L_n(x)$$

dont le degré est aussi inférieur ou égal à n, s'annule en $n+1$ points $\{x_1, x_2...., x_{n+1}\}$, c'est-à-dire :

$$Q_n(x) = 0$$

donc

$$\check{L}_n(x) = L_n(x)$$

cqfd

Exemple 41. Construire les coefficients de Lagrange pour $n+1 = 2$ et $n+1 = 3$.

Solution 42. - Cas $n+1 = 2$: En appliquant la formule (2.5) on obtient

$$p_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}; \;\; p_2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

et alors

$$L(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

- Cas $n+1=3$: En appliquant la formule (2.5) on obtient

$$p_1(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)};\ \ p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)};\ \ p_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)};$$

et alors

$$L_2(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2)+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3).$$

Exemple 43. Construire le polynôme de Lagrange de la fonction donnée par $y=f(x)=\sin\pi x$ pour les points $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{6}$, $x_3=\frac{1}{2}$.

Solution 44. On calcule d'abord les valeurs correspondantes aux points d'interpolation de la fonction $y=f(x)$:

$$y_1=0,\quad y_2=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad y_3=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

On applique ensuite les formules (2.4), on obtient le polynô me de Lagrange de degré inférieur ou égal à 2 suivant :

$$L_2(x)=\frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{6})(0-\frac{1}{2})}.0+\frac{(x)(x-\frac{1}{2})}{\frac{1}{6}(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})}.\frac{1}{2}+\frac{(x)(x-\frac{1}{6})}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}.1$$

Ou

$$L_2(x)=-3x^2+\frac{7}{2}x$$

Exemple 45. Soit la fonction $y=f(x)$ donnée par le tableau suivant :

x	y
$321,0$	$2,50651$
$322,8$	$2,50893$
$324,2$	$2,51081$
$325,0$	$2,51188$

On demande le calcul de la valeur de f en $323,5$.

Solution 46. On pose $x=323,5$; le polynôme de Lagrange sera un polynôme de degr é inférieur ou égal à $n=3$. D'après les formules (2.4), on a :

$$\begin{aligned} f(323,5) &= \frac{(323,5-322,8)(323,5-324,2)(323,5-325,0)}{(321,0-322,8)(321,0-324,2)(321,0-325,0)}.2,50651+\\ &\quad+\frac{(323,5-321,0)(323,5-324,2)(323,5-325,0)}{(322,8-321,0)(322,8-324,2)(322,8-325,0)}.2,50893+\\ &\quad+\frac{(323,5-321,0)(323,5-322,8)(323,5-325,0)}{(324,2-321,0)(324,2-322,8)(324,2-325,0)}.2,51081+\\ &\quad\frac{(323,5-321,0)(323,5-322,8)(323,5-324,2)}{(325,0-321,0)(325,0-322,8)(325,0-324,2)}.2,51188\\ &= -0,07996+1,18794+1,83897-0,43708=2,50987 \end{aligned}$$

2.1 Cas où les points sont equidistants

Soit $\{x_1,x_2....,x_{n+1}\}$, $(n+1)$ points d'interpolation de $[a,b]$, on suppose que :

$$x_2=x_1+h,\ \ x_3=x_2+h=x_1+2h,\ ...x_j=x_{j-1}+h=x_1+(j-1)h,\ \ ...x_{n+1}=x_n+h=x_1+nh$$

Où $h = \frac{b-a}{n}$ représente le pas de la subdivision. Les points d'interpolation x_i sont alors dits *équidistants*. Dans ce cas, les coefficients de Lagrange peuvent être simplifiés, en posant :

$$x = x_1 + th$$

on aura :

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 1, \quad ...t_n = n.$$

D'où

$$\begin{aligned} l_n(t) &= \sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \frac{(x_1 + th - x_1 - (j-1)h)}{((x_1 + (i-1)h) - x_1 + (j-1)h)}\right) y_i \qquad (2.6)\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \frac{(t-j+1)}{(i-j)}\right) y_i \end{aligned}$$

Les coefficients de $l_n(t)$ sont donc indépendants du pas h et des points x_i ; ils peuvent être représentés dans une table.

Exemple 47. Soit la fonction $y = \cos x$ donnée par le tableau suivant :

x	$5,0$	$5,1$	$5,2$	$5,3$	$5,4$	$5,5$	$5,6$	$5,7$
y	$0,283662$	$0,377977$	$0,468516$	$0,554374$	$0,634692$	$0,708669$	$0,775565$	$0,834712$
t	1	2	3	4	5	6	7	8

Calculer $\cos 5,34$.

Solution 48. Posons

$$x = 0,1t + 5$$

Les valeurs de la nouvelle variable t associées aux points d'interpolation seront alors :

$$t = 0,1,2,3,4,5,6,7$$

Il faut donc trouver la valeur de y pour $x = 5,34$, c'est-à-dire pour $t = 3,47$, les points étant équidistants, on a donc :

$$\begin{aligned} l_n(3,47) &= \sum_{i=1}^{8}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{8} \frac{(3,47-j+1)}{(i-j)}\right) y_i \\ &= 0,592864 \end{aligned}$$

Donc $\cos 5,34 = 0,592864$.

3 Estimation de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit $L_n(x)$ le polynôme de Lagrange qui interpole la fonction $y = f(x)$ aux points $\{x_1, x_2 ...., x_{n+1}\}$ c'est-à -dire qui vérifie :

$$L_n(x_1) = y_1, \quad L_n(x_2) = y_2, \quad ..., L_n(x_{n+1}) = y_{n+1}.$$

La question que l'on se pose maintenant est : quelle est l'approximation du polynôme construit par rapport à la fonction $f(x)$? ou en d'autres termes quelle est la grandeur du reste :

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

Pour évaluer cette erreur commise dans l'interpolation par le polynô me de Lagrange, nous supposons que la fonction f est continue, dé rivable et à dérivées continues jusqu'à l'ordre $(n+1)$ dans le domaine $[a,b]$ contenant x et les points d'interpolation x_i. Soit

$$g(x) = f(x) - L_n(x) - k(x-x_1)(x-x_2)......(x-x_n)$$

Où k est une constante. La fonction g possède $n+1$ racines aux points

$$x_1, x_2, ...x_n$$

Choisissons k de sorte que $g(x)$ ait une $(n+2)^{ième}$ racine en un point quelconque fixé $\tilde{x}$ de $[a,b]$, autre que les points d'interpolation. Il suffit pour cela de poser

$$f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x}) - k(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_2)......(\tilde{x}-x_n)$$

D'où

$$k = \frac{f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x})}{(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_2)......(\tilde{x}-x_n)} \tag{3.1}$$

car $\tilde{x}$ n'est pas un point d'interpolation. Pour cette valeur de k, la fonction $g(x)$ admet $(n+2)$ racines sur $[a,b]$ et elle s'annule aux extrémités de chacun des intervalles suivants :

$$[x_1,x_2], \quad [x_2,x_3], \quad ... \quad [x_i,\tilde{x}], \quad [\tilde{x},x_{i+1}], \quad ...[x_n,x_{n+1}],$$

En appliquant le théorème de Rolle à chacun de ces intervalles, on voit que la dérivée $g'(x)$ admet au moins $(n+1)$ racines sur $[a,b]$. De même, la dérivée seconde $g''(x)$ s'annule au moins n fois sur $[a,b]$. En opérant de même pour les dérivées successives de la fonction g, on aboutit à la conclusion que dans $[a,b]$, la dérivée $g^{(n+1)}(x)$ possède au moins une racine. Notons par ξ cette racine : on a donc $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Comme

$$g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!$$

Pour $x = \xi$ on obtient :

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)!$$

Donc

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{3.2}$$

En identifiant les équations (3.1) et (3.2) on obtient :

$$\frac{f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x})}{(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_2)......(\tilde{x}-x_n)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

C'est-à-dire

$$f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_2)......(\tilde{x}-x_{n+1}) \tag{3.3}$$

Comme $\tilde{x}$ est complètement arbitraire, l'équation (3.3) s'écrit :

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_1)(x-x_2)......(x-x_{n+1}) \tag{3.4}$$

Où $\xi \in [a,b]$ dépend de x.

Remarque 49. L'équation (3.4) est vraie pour tout point de $[a,b]$, y compris les points d'interpolation. En posant

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

Nous obtenons l'estimation de l'erreur absolue dans l'interpolation par le polynôme de Lagrange sous la forme :

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_1)(x-x_2)......(x-x_n)|$$

Exemple 50. Avec quelle précision peut-on calculer $\sqrt{115}$ à l'aide d'une interpolation par le polynôme de Lagrange de la fonction $y = \sqrt{x}$si l'on prend les points d'interpolation

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 121, \quad x_3 = 144.$$

Solution 51. Comme on a

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \quad y''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Il s'ensuit

$$M_3 = \max\left|y'''\right| = \frac{3}{8}(100)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}10^{-5} \quad \text{pour } 100 \leq x \leq 144$$

Donc

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &\leq \frac{3}{8}10^{-5}\frac{1}{3!}\,|(115-100)(115-121)(115-144)| = \\ &= \frac{1}{16}10^{-5}.15.6.29 \approx 1,6.10^{-3} \end{aligned}$$

4 POLYNOME DE NEWTON

4.1 Différences finies

Définition 52. Soit $y = f(x)$ une fonction donnée. On pose $\Delta x = x_{i+1} - x_i = h$ une valeur fixée de l'accroissement de x. On appelle *différence d'ordre un* de la fonction y l'expression :

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

On définit de façon analogue les différences d'ordres supé rieurs

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1}y) \quad (n = 2, 3, ...)$$

Exemple 53. $\Delta^2 y = \Delta[f(x+\Delta x) - f(x)] = [f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)] - [f(x+\Delta x) - f(x)] = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$.

Exemple 54. Construire les différences de $f(x) = x^3$, en prenant le pas $\Delta x = 1$.

Solution 55. On a $\Delta f(x) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$, $\Delta^2 f(x) = \left[3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1\right] - (3x^2 + 3x + 1) = 6x + 6$, $\Delta^3 f(x) = [6(x+1) + 6] - (6x+6) = 6$, $\Delta^n f(x) = 0, \ \text{pour } n > 3$.

Proposition 56. Si $f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ est un polynôme de degré n, alors $\Delta^n f(x) = \Delta^n P_n(x) = n!a_0h^n = C$ où $\Delta x = h$ et C est une constante.

Démonstration. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \Delta P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x) = \\ &= a_0\left[(x+h)^n - x^n\right] + a_1\left[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}\right] + ... \\ &\quad ... + a_{n-1}\left[(x+h) - h\right] \end{aligned}$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on voit que $\Delta f(x) = \Delta P_n(x)$ est un polynôme de degré $(n-1)$:

$$\Delta f(x) = \Delta P_n(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$$

Où

$$b_0 = nha_0$$

Suivant le même raisonnement la différence seconde $\Delta^2 f(x) = \Delta^2 P_n(x)$ est un polynôme de degré $(n-2)$:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta^2 P_n(x) = c_0x^{n-2} + c_1x^{n-3} + \cdots + c_{n-2}$$

et

$$c_0 = (n-1)hb_0 = n(n-1)h^2a_0$$

En raisonnant ainsi on établit de proche en proche que

$$\Delta^n f(x) = \Delta^n P_n(x) = n!h^n a_0$$

D'où l'on conclut

$$\Delta^m f(x) = \Delta^m P_n(x) = 0 \quad \text{pour} \ \ m > n$$

cqfd

Remarque 57. Le symbole Δ (delta) peut être considéré comme un *opérateur* qui associe à la fonction $y = f(x)$ la fonction $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ (Δx étant une constante).

Remarque 58. L'opérateur Δ a les propriétés suivantes :

1. $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$;
2. $\Delta(Ku) = K\Delta u$ (K est une constante) ;
3. $\Delta^m(\Delta^n u) = \Delta^{m+n} u$ (m et n entiers non négatifs) ;
4. On pose par définition $\Delta^0 u = u$.

4.2 Différences divisées

Définition 59. Soit $\{x_1, x_2...., x_{n+1}\}$, $(n+1)$ points d'interpolation de $[a, b]$, et :

$$f(x_1) = y_1, \ \ f(x_2) = y_2, \ \ ..., f(x_{n+1}) = y_{n+1}.$$

on pose :

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, ...)$$

On appelle *différences divisées d'ordre* 1, les relations données par :

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (i = 1, 2, ...)$$

Exemple 60. $f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $f[x_2, x_3] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, etc...

D'une façon analogue on définit les *différences divisées d'ordre 2*

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \quad (i = 1, 2, ...)$$

Exemple 61. $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{f[x_3, x_1]}$.

D'une façon générale, les *différences divisées d'ordre n* s'obtiennent à partir des différences divisées d'ordre $(n-1)$ à l'aide de la relation de récurrence suivante :

$$f[x_i, x_{i+1}, ...x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, ...x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}, \quad (n = 1, 2, ...; i = 1, 2, ...)$$

Remarque 62. Les différences divisées sont symétriques de leurs arguments, c'est-à-dire que les différences divisées ne changent pas avec la permutation des éléments. Plus précisément, pour toute permutation σ de $\{1, 2...., k\}$ on a

$$f\left[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ...x_{\sigma(k)}\right] = f[x_1, x_2, ...x_k]$$

Exemple 63. $f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = f[x_2, x_1]$

Théorème 64. Soit p_n le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_1, x_2 ...., x_{n+1}\}$, alors pour tout k de $\{1, 2...., n\}$ on a :

$$f[x_1, x_2, ...x_k] = \frac{f[x_2, ...x_{k+1}] - f[x_1, x_k]}{x_{k+1} - x_1},$$

Démonstration. L'idée est de construire une fonction polynôme qui interpole f sur $\{x_1, x_2 ...., x_{k+1}\}$; puis on identifie les deux expressions disponibles de son coefficient dominant. Soit p défini par

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_{k+1} - x_1} q_k(x) + \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_1} p_k(x)$$

Où q_k (respectivement p_k) désigne le polynôme d'interpolation de f sur $\{x_2, x_3 ...., x_{k+1}\}$ (respectivement $\{x_1, x_2 ...., x_k\}$). Par définition, p est un polynôme de degré inférieur ou égal à k. Montrons que p interpole f sur $\{x_1, x_2 ...., x_k\}$. On évalue d'abord $p(x_1)$: la contribution du premier terme de la somme est nulle ; il vient $p(x_1) = p_k(x_1)$ soit $p(x_1) = f(x_1)$ par d éfinition de p_k. On évalue alors $p(x_k)$ par le même type de raisonnement, on montre que $p(x_k) = f(x_k)$. Puis on considè re x_j pour tout j dans $\{2, 3...., k\}$. On sait que $p_k(x_j) = q_k(x_j) = f(x_j)$ grâce aux définitions de p_k et de q_k. Un calcul simple montre que : $p(x_j) = f(x_j)$; en effet

$$p(x_j) = \frac{1}{x_{k+1} - x_1}\left[\left(x_j - x_1\right) f(x_j) + \left(x_{k+1} - x_j\right) f(x_j)\right] \tag{4.1}$$

Soit

$$p(x_j) = f(x_j)$$

p est le polynôme d'interpolation de f sur $\{x_1, x_2 ...., x_{k+1}\}$. Soit α le coefficient dominant de p ; d'après ce qui préc ède, $\alpha = f[x_1, ..., x_{k+1}]$. Sur l'expression (4.1), on voit que le coefficient dominant de p est donné par

$$\alpha = \frac{1}{x_{k+1} - x_1}[\text{coef dominant } (q_k) - \text{coef dominant } (p_k)]$$

comme (q_k) et (p_k) sont des polynômes d'interpolation sur $\{x_2, x_3 ...., x_{k+1}\}$ et $\{x_1, x_2 ...., x_k\}$ respectivement, l'égalité cherché e en découle. cqfd

Remarque 65. Les différences divisées forment généralement un tableau du type suivant :

x	$f(x)$	Différences divisées			
		Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3	Ordre 4
x_1	$f[x_1]$				
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$
		$f[x_3, x_4]$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$	
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5]$		
		$f[x_4, x_5]$			
x_5	$f[x_5]$				

Exemple 66. Donner les différences divisées de la fonction donnée par le tableau suivant :

x	0	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,7$	$0,9$
y	$132,651$	$148,877$	$157,464$	$166,375$	$195,112$	$216,000$

Solution 67. Les résultats sont portés sur le tableau suivant :

x	$f(x)$	Différences divisées			
		Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3	Ordre 4
0	132,651				
		81,13			
0,2	148,877		15,8		
		85,87		1	
0,3	157,464		16,2		0
		89,11		1	
0,4	166,375		16,7		0
		95,79		1	
0,7	195,112		17,3		
		104,44			
0,9	216,000				

4.3 Polynôme d'interpolation de Newton :

On a par définition

$$f[x,x_1] = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

donc

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f[x,x_1]$$

et

$$f[x,x_1,x_2] = \frac{f[x,x_1] - f[x_1,x_2]}{x - x_2}$$

donc

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f[x_1,x_2] + (x - x_1)(x - x_2) f[x,x_1,x_2]$$

en réitérant le procédé, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1) + (x - x_1) f[x_1,x_2] + (x - x_1)(x - x_2) f[x_1,x_2,x_3] + \cdots + \\ &\quad + (x - x_1)(x - x_2)\cdots\cdots(x - x_n) f[x_1,x_2,...,x_{n+1}] \\ &\quad + (x - x_1)(x - x_2)\cdots\cdots(x - x_n)(x - x_{n+1}) f[x,x_1,x_2,...,x_{n+1}] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Remarque 68. Si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n on a :

$$f[x,x_1,x_2,...,x_{n+1}] = 0$$

Remarque 69. Le polynôme défini par

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_1) + (x - x_1) f[x_1,x_2] + (x - x_1)(x - x_2) f[x_1,x_2,x_3] + \cdots + \\ &\quad + (x - x_1)(x - x_2)\cdots\cdots(x - x_n) f[x_1,x_2,...,x_{n+1}] \end{aligned}$$

est le polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à n de f pour les points $\{x_1, x_2...., x_{n+1}\}$ appelé *polynôme d'interpolation de Newton*. C'est-à-dire qu'il vérifie :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 1,2,...n+1.$$

4.4 Erreur d'interpolation

En comparant $f(x)$ et $P_n(x)$, nous obtenons la formule générale de l'erreur :

$$\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots\cdots(x - x_{n+1}) f[x,x_1,x_2,...,x_{n+1}]$$

que l'on peut ecrire sous la forme :

$$\varepsilon(x) = \left(\prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)\right) f[x,x_1,x_2,...,x_{n+1}]$$

4.5 Autre écriture du polynôme d'interpolation de Newton

4.5.1 Cas des points équidistants

En posant le pas du tableau $h = \Delta x$ ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, ..., n+1$) et $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n), y_{n+1} = f(x_{n+1})$; alors nous obtenons :

$$f(x) = y_1 + k\Delta y_1 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \cdots + \frac{k(k-1)...(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_1 + R_n(x)$$

Où

$$k = \frac{x - x_1}{h} \quad \text{et} \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1;\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,$$

et

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}k(k-1)...(k-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x) \simeq \frac{k(k-1)...(k-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_1; \qquad \xi_x \in [x, x_i]$$

Exemple 70. Sachant que $\sin 26° = 0,43837$; $\sin 27° = 0,45399$ et $\sin 28° = 0,46947$, calculer $\sin 26°15'$.

Solution 71. Le tableau des valeurs se présente comme suit :

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
1	26	0,43837		
			0,01562	
2	27	0,45399		−0,00014
			0,01548	
3	28	0,46947		

comme $h = 60'$ et $k = \frac{1575' - 1560}{60}' = \frac{1}{4}$ donc

$$\sin 26°15' = 0,43837 + \frac{1}{4}.0,01562 + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2}(-0,00014) = 0,44229.$$

L'erreur

$$|R_2(x)| \leq \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!}(\frac{\pi}{180}) \simeq 0,2510^{-6}$$

car comme $y = \sin x$ alors $\left|y^{(n)}\right| \leq 1$.

Remarque 72. Si l'on fixe n et que l'on pose

$$h = \max_{h\in\{1,...,n\}} |x_{k+1} - x_k|$$

alors pour tout $x \in [x_1, x_2]$, on a

$$|(x - x_1)\cdots(x_1 - x_{n+1})| \leq h(h)(2h)\cdots(nh) \leq h^{n+1}n!.$$

Si f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ et si on a $x_1 = a$ et $h < \frac{b-a}{n}$, alors

$$\sup_{x\in[x_1,x_2]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{n+1}h^{n+1}.$$

Comme le second membre tend vers zéro avec h, on peut donc rendre

$$\sup_{x\in[x_1,x_2]} |f(x) - P_n(x)|$$

aussi petit que l'on veut (avec h suffisamment petit). Ceci montre que l'interpolation polynomiale peut être utilisée pour approcher les valeurs de $f(x)$.

Remarque 73. La remarque précédente n'est en général pas vraie, même si f est très régulière sur $[a,b]$. Dans le cas o ù $x_{k+1}-x_k$ ne dépend pas de k, c'est là ce qu'on appelle le phénomène de Runge. Par exmple si

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

et si $[a,b]=[-1,1]$, on peut montrer que le polyn ôme $P_n(x)$ interpolant $f(x)$ aux points

$$x_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad (k = 1, \dots, n+1),$$

ne tend pas vers f lorsque $n \to \infty$.

5 INTERPOLATION CUBIQUE DE HERMITE

On cherche le polynôme P_3 de $\mathbb{R}[X]$ qui prend deux valeurs imposées y_1 et y_2 en deux points donnés x_1 et x_2, et deux valeurs imposées de la dérivée y_3 et y_4 aux deux mêmes points, c'est-à -dire :

$$P_3(x_1) = y_1, \quad P_3(x_2) = y_2, \quad P_3'(x_1) = y_3, \quad P_3'(x_2) = y_4.$$

Comme il y a quatre inconnues à déterminer dans $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on écrit les équations

$$\begin{cases} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d &= y_1 \\ ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d &= y_2 \\ 3ax_1^2 + 2bx_1 + c &= y_3 \\ 3ax_2^2 + 2bx_2 + c &= y_4 \end{cases}$$

le déterminant de ce système se factorise en $-(x_2-x_1)^4$ et on obtient :

$$\begin{aligned} a &= \frac{2(y_1-y_2)}{(x_2-x_1)^3} + \frac{y_3+y_4}{(x_1-x_2)^2} \\ b &= \frac{3(x_1+x_2)(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)^3} - \frac{(x_1+2x_2)y_3+(2x_1+x_2)y_4}{(x_1-x_2)^2} \\ c &= \frac{6x_1x_2(y_1-y_2)}{(x_2-x_1)^3} + \frac{x_2(2x_1+x_2)y_3+x_1(2x_2+x_1)y_4}{(x_1-x_2)^2} \\ d &= \frac{x_1^2(3x_1-x_2)y_1-x_2^2(3x_2-x_1)y_2}{(x_1-x_2)^3} - \frac{x_1x_2(x_2y_3+x_1y_4)}{(x_1-x_2)^2}. \end{aligned}$$

6 SERIE D'EXERCICES

Exercice 74. On considère la fonction $f(x)$ donnée par le tableau suivant :

x	1	4	6
$f(x)$	1.5709	1.5727	1.5751

Trouver une approximation de $f(3.5)$ en utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange du second degré .

Exercice 75. Ecrire les différences divisées de $f(x) = x^2$ et de $g(x) = x^3$.

Exercice 76.

1. Construire le polynôme d'interpolation de Newton de la fonction $y = f(x)$ donnée par le tableau suivant :

x	0	2.5069	5.0154	7.52270
$f(x)$	0.3989423	0.3988169	0.3984408	0.3978138

2. Trouver à l'aide de ce polynôme $f(3.7608)$.

Exercice 77. Soit le tableau des valeurs $y = \log x$, trouver $\log 1005$.

x	1000	1010	1020	1030	1040	1050
y	3.0000000	3.0043214	3.0086002	3.0128372	3.0170333	3.0211893

Exercice 78. Trouver $\sin 14°$ à partir du tableau des valeurs données ci-dessous de la fonction $y = \sin x$, le pas étant $h = 5°$.

x	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°
y	0.2588	0.3420	0.4226	0.5000	0.5736	0.6428	0.7071	0.7660	0.8192

Exercice 79.

1. En interpolant par un polynôme de degré 3 et en utilisant la formule appropriée calculer pour $x = 1.05$, à l'aide de la table donnée ci-dessous, les valeurs de la fonction $y = \sin x$.

x	1.0	1.1	1.2	1.3
y	0.841471	0.891207	0.932039	0.963558

2. Donner une majoration de l'erreur.