Chapitre 2

APPROXIMATION

1 GÉNÉRALITÉS

Soit $X = \{x_i,\ \ i = 1, 2, \dots n\}$ un ensemble de n points appartenant à l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Supposons qu'à chaque x_i de X, on sache associer un $y_i \in \mathbb{R}$, résultat d'une expérience ou valeur donnée par une table, mais que cette opération soit impossible avec $x \in [a,b] \setminus X$.

Notons

$$\mathcal{D} = \{(x_i, y_i),\ \text{ pour }\ x_i \in X\}.$$

On veut déterminer une fonction, *facilement calculable*, qui permette d'obtenir une estimation "*raisonnable*" de la réponse du phénomène pour la valeur x.

Notons g cette fonction et $\mathcal{G} = \{(x_i, g(x_i)),\text{ pour }\ x_i \in X\}$. Si on définit une "*distance*" entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$, nous pouvons chercher une fonction g, d'un type préalablement choisi (un polynôme par exemple), telle que cette distance soit minimale.

C'est ce qu'on appelle une **approximation**.

Un procédé général consiste à limiter la représentation de g aux combinaisons linéaires des $n+1$ fonctions d'une certaine base, choisies à priori.

Si on désigne par

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_{n+1}(x)$$

les fonctions de la base, les représentations utilisées seront les combinaisons

$$a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + a_3 u_3(x) + \dots + a_{n+1} u_{n+1}(x) \tag{1.1}$$

qui dépendent des $n+1$ coefficients a_i que nous devrions calculer pour définir chaque approximation.

Remarque 22. On utilise un procédé analogue lorsque on étudie la représentation de fonctions par des séries de fonctions.

On prend une base infinie $u_1(x), u_2(x), \dots, u_{n+1}(x), \dots$ et on considère les séries

$$a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + a_3 u_3(x) + \dots + a_{n+1} u_{n+1}(x) + \dots \tag{1.2}$$

L'equation (1.1) apparaît alors comme la somme partielle des $n+1$ premiers termes de (2.1).

2 APPROXIMATION

2.1 Meilleure approximation

Soit $(\mathbf{E}, d)$ un espace métrique et $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$. Chercher à approcher un élément f de $\mathbf{E}$ par un élément de $\mathbf{F}$, c'est donc déterminer g de $\mathbf{F}$ tel que :

$$d(f,g) = \min_{h \in \mathbf{F}} d(f,h) \tag{2.1}$$

S'il existe, cet élément sera appelé *meilleure approximation* de f dans $\mathbf{F}$ au sens de la distance d.

Théorème 23 (d'existence). Si **F** est une partie compacte de **E**, alors il existe au moins un élément g de **F** tel que :

$$d(f,g) = \min_{h\in\mathbf{F}} d(f,h).$$

Corollaire 24. Soit **E** un espace normé. Si **F** est un sous espace vectoriel de **E** de dimension finie, alors il existe au moins un élément g de **F** tel que :

$$\| f-g \| = \min_{h\in\mathbf{F}} \| f-h \|.$$

Remarque 25.
1. Nous supposerons dorénavant que **E** est l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
2. g est le plus souvent cherchée sous la forme suivante :

$$g(x) = a_1u_1(x) + a_2u_2(x) + a_3u_3(x) + \ldots + a_{n+1}u_{n+1}(x)$$

où les $u_i(x)$ sont des fonctions choisies dans :
— la classe des monômes :

$$1, x, x^2, \ldots, x^n.$$

— la classe des fonctions trigonométriques :

$$1, \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx.$$

— la classe des fonctions exponentielles :

$$1, \exp x, \exp 2x, \ldots, \exp nx$$

C'est-à-dire que :
—

$$g(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \ldots + a_nx + a_{n+1},$$

ou ;

$$\begin{aligned} g(x) &= c + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \ldots + a_n\cos nx + \\ &\quad + b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \ldots + b_n\sin nx, \end{aligned}$$

ou ;

$$g(x) = a_1\exp b_1x + a_2\exp b_2x + a_3\exp b_3x + \ldots + a_n\exp b_nx,$$

ou aussi ;

$$g(x) = \frac{a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \ldots + a_nx + a_{n+1}}{b_1x^n + b_2x^{n-1} + b_3x^{n-2} + \ldots + b_nx + b_{n+1}},$$

3. L'approximation de f par des polynômes, dite **approximation polynomiale**, est la plus fréquente.

Théorème 26. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\max_{x\in[a,b]} | f(x) - P_n(x) | < \varepsilon.$$

3 APPROXIMATION AU SENS DES MOINDRES CARRÉS

Définition 27. Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel. Pour tout couple (f,g) de $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$, on définit le produit scalaire noté $\langle f,g\rangle$ et la norme associée par :

$$\| f \| = \sqrt{\langle f,f\rangle}.$$

Pour tout $f\in\mathbf{E}$, il existe $g\in\mathbf{F}$ ($\mathbf{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$, de dimension finie) tel que :

$$\| f-g \| = \min_{h\in\mathbf{E}} \| f-h \| .$$

Théorème 28. Une condition nécessaire et suffisante pour que g soit une meilleure approximation de f est que :

$$\langle f-g,h\rangle = 0 \qquad \text{pour tout} \quad h\in\mathbf{F} \tag{3.1}$$

g est appelée meilleure approximation de f au sens des moindres carrés.

Démonstration. La Condition est nécessaire : Soit g la meilleure approximation de f. Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe $h_1\in\mathbf{F}$ tel que :

$$\langle f-g,h_1\rangle = c\neq 0.$$

Soit $h_2\in\mathbf{F}$ défini par :

$$h_2 = g+\frac{c}{\| h_1 \|^2}h_1.$$

on a

$$\begin{aligned}\| f-h_2 \| &= \sqrt{\langle f-g-\frac{c}{\| h_1 \|^2}h_1, f-g-\frac{c}{\| h_1 \|^2}h_1\rangle}\\ &= \sqrt{\| f-g \|^2-\frac{c^2}{\| h_1 \|^2}} < \| f-g \|\end{aligned}$$

Ce qui est absurde.

La Condition est suffisante : Soit $g_1\in\mathbf{F}$ tel que : $\langle f-g_1,h\rangle = 0$ pour tout $h\in\mathbf{F}$ on a alors :

$$\begin{aligned}\| f-h \| &= \sqrt{\langle f-h,f-h\rangle}\\ &= \sqrt{\langle f-g_1-h+g_1, f-g_1-h+g_1\rangle}\\ &= \sqrt{\| f-g_1 \|^2+\| h-g_1 \|^2}.\end{aligned}$$

D'où $\| f-g_1 \| < \| f-h \|$ pour tout $h\in\mathbf{F}$ et donc $g_1 = g$. cqfd

Théorème 29. La meilleure approximation au sens des moindres carrés est unique.

Démonstration. Soient g_1 et g_2 deux meilleures approximations de f on a donc :

$$\langle f-g_1,h\rangle = 0 = \langle f-g_2,h\rangle \quad \text{pour tout} \quad h\in\mathbf{F}$$

en particulier pour $h = g_1-g_2$, d'où

$$\begin{aligned}| \quad & | g_1-g_2 \| = \sqrt{\langle g_1-g_2+f-f, g_1-g_2\rangle} =\\ = \quad & \sqrt{\langle f-g_1, g_1-g_2\rangle+\langle f-g_2, g_1-g_2\rangle} = 0\end{aligned}$$

donc $g_1 = g_2$. cqfd

4 CARACTÉRISATION

Il s'agit maintenant de construire le polynôme d'approximation qu'on note $Q_n(x)$ défini par :

$$Q_n(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_{n+1} x^n.$$

tel que la différence

$$\varepsilon(x) = f(x) - Q_n(x)$$

ait une norme aussi petite que possible.

Soit $\mathbf{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Et soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. La meilleure approximation de f par un polynôme Q_n de $\mathbf{P}_n$ s'écrit :

$$Q_n(x) = b_1 u_n(x) + b_2 u_2(x) + \ldots + b_{n+1} u_0(x) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i u_{n+1-i}(x).$$

(Où les u_i forment une base de $\mathbf{P}_n$, c'est-à-dire : $u_i(x) = x^i \quad i = 0,1,\ldots,n$), et un polynôme quelconque P_n de $\mathbf{P}_n$ s'écrit :

$$P_n(x) = a_1 u_n(x) + a_2 u_2(x) + \ldots + a_{n+1} u_0(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i u_{n+1-i}(x).$$

La condition nécessaire et suffisante du théorème s'écrit :

$$\langle f - \sum_{i=1}^{n+1} b_i u_{n+1-i}, \sum_{i=1}^{n+1} a_i u_{n+1-i} \rangle = 0$$

pour tout élément $(a_1, a_2, \ldots, a_n + 1)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Ce qui donne le système d'équations :

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i \langle u_{n+1-i}, u_{n+1-j} \rangle = \langle f, u_{n+1-j} \rangle \quad j = 1,2,\ldots,n+1 \tag{4.1}$$

qui admet une solution unique.

4.1 Norme

Remarque 30. Sur l'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}([a,b])$, on utilise le produit scalaire suivant : Soit ω une fonction positive n'ayant qu'un nombre fini de racines sur $[a,b]$ et telle que : $\int_a^b \omega(x)h(x)dx$ existe pour tout $h \in \mathcal{C}([a,b])$. On suppose ω continue par morceaux et on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx.$$

Remarque 31. Le plus souvent dans le cas de l'approximation polynomiale on prend $\omega(x) = 1$.

La meilleure approximation de $f \in \mathcal{C}([a,b])$ par un polynôme de $\mathbf{P}_n$est donc le polynôme Q_n défini par :

$$\int_a^b \omega(x)[f(x) - Q_n(x)]^2 dx = \min_{P_n \in \mathbf{P}_n} \int_a^b \omega(x)[f(x) - P_n(x)]^2 dx.$$

Ce polynôme existe et vérifie :

$$\int_a^b \omega(x)[f(x) - Q_n(x)] P_n(x) dx = O \quad \text{pour tout} \quad P_n \in \mathbf{P}_n$$

Ses coefficients b_i sont donnés par le système d'équations linéaires :

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i \int_a^b \omega(x)x^{2n+2-i-j}dx = \int_a^b \omega(x)f(x)x^{n+1-j}dx \quad j = 1,\dots,n+1 \tag{4.2}$$

Exemple 32. Le polynôme Q_2 qui réalise la meilleure approximation au sens des moindres carrés de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ sur l'intervalle $[-1,1]$ avec $\omega(x) = 1$ est donné par la condition :

$$\sum_{i=1}^{3} b_i \int_{a=-1}^{b=1} 1.x^{2.2+2-i-j}dx = \int_{a=-1}^{b=1} 1.(x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4})x^{2+1-j}dx \quad j = 1,2,3$$

c'est-à-dire le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{2}{5}b_1 + \frac{2}{3}b_3 & = & -\frac{2}{5} + \frac{1}{6} & = & -\frac{7}{30} \\ \frac{2}{3}b_2 & = & \frac{2}{5} - \frac{1}{6} & = & \frac{7}{30} \\ \frac{2}{3}b_1 + 2b_3 & = & -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} & = & -\frac{1}{6} \end{array} \right.$$

qui donne comme solution :

$$b_1 = -1; b_2 = \frac{7}{20}; b_3 = \frac{1}{4}.$$

le polynôme cherché est donc :

$$Q_2(x) = -x^2 + \frac{7}{20}x + \frac{1}{4}.$$

L'erreur commise pour cette approximation s'évalue comme suit :

$$\varepsilon_2 = f(x) - Q_2(x) = (x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}) - \left(-x^2 + \frac{7}{20}x + \frac{1}{4}\right) = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Exemple 33. Le polynôme Q_2 qui réalise la meilleure approximation au sens des moindres carrés de la fonction $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1,1]$ avec $\omega(x) = 1$ est donné par la condition :

$$\sum_{i=1}^{3} b_i \int_{-1}^{1} x^{6-i-j}dx = \int_{-1}^{1} |x|x^{3-j}dx \quad j = 1,2,3$$

c'est-à-dire le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{2}{5}b_1 + \frac{2}{3}b_3 & = & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}b_2 & = & 0 \\ \frac{2}{3}b_1 + 2b_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

qui donne comme solution :

$$b_1 = \frac{15}{16}; b_2 = 0; b_3 = \frac{3}{16}.$$

le polynôme cherché est donc :

$$Q_2(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}.$$

L'erreur commise pour cette approximation s'évalue comme suit :

$$\varepsilon_2 = f(x) - Q_2(x) = |x| - \left(\frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}\right) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{15}{16}x^2 - x - \frac{3}{16} & \text{si} & x < 0 \\ -\frac{15}{16}x^2 + x - \frac{3}{16} & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. .$$

5 SERIE D'EXERCICES

Exercice 34. Trouver le polynôme P_2 qui réalise la meilleure approximation au sens des moindres carrés de la fonction $f(x) = |x-1|$ sur l'intervalle $[0,2]$ en prenant $\omega(x) = 1$.

Exercice 35. Trouver le polynôme P_2 qui réalise la meilleure approximation au sens des moindres carrés de la fonction $f(x) = |3x-5|$ sur l'intervalle $[-1,2]$ en prenant $\omega(x) = 1$.

Exercice 36. Trouver le polynôme P_2 qui réalise la meilleure approximation au sens des moindres carrés de la fonction donnée par le tableau suivant :

x	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1
$f(x)$	$-0,75$	0	$0,25$	0	0