Examen final

Transfert de chaleur et de masse approfondi

Durée : 1 h 30 mn

Exercice n°1 (5 points)

Si la fraction molaire $x_A(z)$ de l'espèce A vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dx_A(z)}{dz} - \left(\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}\right) x_A(z) = -\frac{N_{Az}}{cD_{AB}}$$

Trouver l'équation différentielle que doit vérifier la fraction molaire $x_B(z)$ de l'espèce B dans le système binaire (A, B).

Exercice n°2 (5 points)

Le pouvoir émissif spectral d'un corps noir en fonction de la fréquence ν et de la température absolue T est donné par la formule de Planck

$$E_b(\nu,T) = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

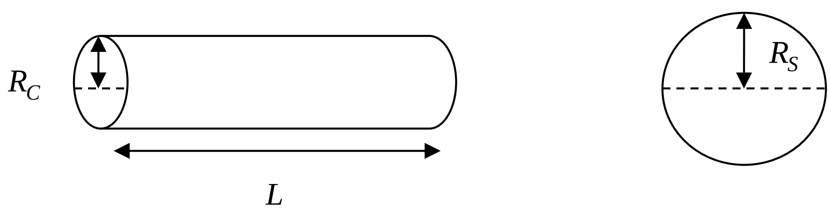
où c, h et k sont respectivement, la vitesse de la lumière dans le vide, la constante de Planck et la constante de Boltzmann. Sachant que le pouvoir émissif spectral admet un maximum, monter que la fréquence au quelle correspond ce maximum vérifie l'équation

$$\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}} = \frac{1}{3}\frac{h\nu}{kT}$$

Exercice n°3 (10 points)

Une sphère métallique de diamètre R_S et un cylindre de diamètre R_C et de longueur L. Ils sont constitués d'un matériau de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ, de capacité calorifique C_P et sont portés à la température T_0 ensuite plongés simultanément dans un bain liquide de température T_∞. Si le coefficient d'échange entre le liquide dans le bain et les deux corps est h,

1) calculer les longueurs caractéristiques de la sphère L_{cS} et du cylindre L_{cC},
2) déduire une relation entre les temps que prendrons, respectivement la sphère et le cylindre t_S et t_C, pour atteindre la même température finale en fonction des diamètres R_S, R_C et la longueur L.



<u>Corrigé type de l'examen final</u>

<u>Transfert de chaleur et de masse approfondi</u>

<u>Durée : 1 h 30 mn</u>

<u>Exercice n°1</u> (5 points)

Comme la fraction molaire $x_A(z)$ de l'espèce A vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dx_A(z)}{dz} - \left(\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}\right) x_A(z) = -\frac{N_{Az}}{cD_{AB}}$$

et sachant que

$$x_A(z) = 1 - x_B(z) \qquad \boxed{1.0}$$

nous obtenons

$$\frac{d\left[1-x_B(z)\right]}{dz} - \left(\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}\right)\left[1-x_B(z)\right] = -\frac{N_{Az}}{cD_{AB}} \qquad \boxed{1.0}$$

$$-\frac{dx_B(z)}{dz} - \frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}} + \left(\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}\right) x_B(z) = -\frac{N_{Az}}{cD_{AB}} \qquad \boxed{1.0}$$

$$-\frac{dx_B(z)}{dz} - \frac{N_{Az}}{cD_{AB}} - \frac{N_{Bz}}{cD_{AB}} + \left(\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}\right) x_B(z) = -\frac{N_{Az}}{cD_{AB}} \qquad \boxed{1.0}$$

soit

$$\frac{dx_B(z)}{dz} - \left(\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}\right) x_B(z) = -\frac{N_{Bz}}{cD_{AB}} \qquad \boxed{1.0}$$

<u>Exercice n°2</u> (5 points)

Si nous dérivons la relation $E_b(\nu,T) = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$ par rapport à la fréquence, nous trouvons

$$\frac{dE_b(\nu,T)}{d\nu} = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\right) = \frac{3\left(\frac{2\pi h}{c^2}\right)\nu^2\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right) - \left(\frac{2\pi h}{c^2}\right)\nu^3\left(\frac{h\nu}{kT}\right)e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)^2} \qquad \boxed{1.0}$$

comme la fonction $E_b(\nu,T)$ admet un maximum, nous devons avoir $\frac{dE_b(\nu,T)}{d\nu} = 0$, d'où la relation $\boxed{1.0}$

$$3\left(\frac{2\pi h}{c^2}\right)\nu^2\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right) - \left(\frac{2\pi h}{c^2}\right)\nu^3\left(\frac{h\nu}{kT}\right)e^{\frac{h\nu}{kT}} = 0 \qquad \boxed{1.0}$$

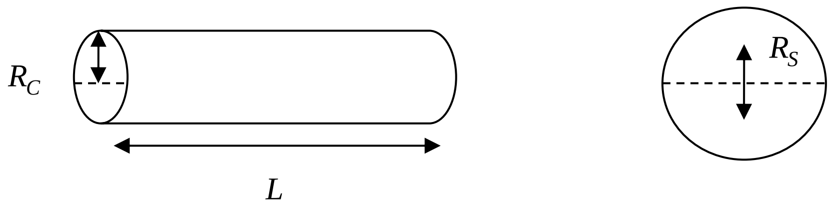
en réarrangeant les termes, nous obtenons

$$3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)-\frac{h\nu}{kT}e^{\frac{h\nu}{kT}}=0 \qquad \boxed{1.0}$$

soit

$$\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}}=\frac{1}{3}\frac{h\nu}{kT} \qquad \boxed{1.0}$$

<u>Exercice n°3</u> (10 points)



1) Les longueurs caractéristiques de la sphère L_{cS} et du cylindre L_{cC} sont :

$$L_{cS}=\frac{V_S}{S_S}=\frac{\frac{4}{3}\pi\left(R_S\right)^3}{4\pi\left(R_S\right)^2}=\frac{R_S}{3} \qquad \boxed{1.0}$$

$$L_{cC}=\frac{V_C}{S_C}=\frac{\pi\left(R_C\right)^2L}{2\pi R_C L+2\pi\left(R_C\right)^2}=\frac{\left(R_C\right)^2L}{2\left(R_C\right)^2+2R_C L} \qquad \boxed{1.0}$$

2) En appliquant la formule

$$\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty}=e^{-\frac{h}{\rho C L_c}t} \qquad \boxed{1.0}$$

soit

$$\frac{T_f\left(t_S\right)-T_\infty}{T_i-T_\infty}=e^{-\frac{h}{\rho C L_{cS}}t_S} \qquad \boxed{1.0}$$

$$\frac{T_f\left(t_C\right)-T_\infty}{T_i-T_\infty}=e^{-\frac{h}{\rho C L_{cC}}t_C} \qquad \boxed{1.0}$$

Comme

$$T_f\left(t_S\right)=T_f\left(t_C\right) \qquad \boxed{1.0}$$

nous obtenons

$$e^{-\frac{h}{\rho C L_{cS}}t_S}=e^{-\frac{h}{\rho C L_{cC}}t_C} \qquad \boxed{1.0}$$

d'où

$$\frac{t_S}{L_{cS}}=\frac{t_C}{L_{cC}} \qquad \boxed{1.0}$$

soit, au final

$$\frac{t_S}{t_C}=\frac{L_{cS}}{L_{cC}}=\frac{2}{3}\frac{R_S\left(R_C+L\right)}{R_C L} \qquad \boxed{2.0}$$