Centre Universitaire -Abdelhafid Boussouf- Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

1ere Année Master

Mathématiques Appliquées et fondamentales

Introduction aux processus aléatoires

Serie d'exercices IV

Exercice 1:

Un joueur dispose initialement de la somme $X_0 = 1$. Il joue à un jeu de hasard, dans lequel il mise à chaque tour une proportion λ de son capital, avec $0 < \lambda \leq 1$. Il a une chance sur deux de gagner le double de sa mise, sinon il perd sa mise.

L'évolution du capital X_n en fonction du temps n est décrite par

$$X_{n+1} = (1-\lambda)X_n + \lambda X_n \xi_n \ (n \geq 0)$$

où les ξ_n sont i.i.d., avec $\mathbb{P}\{\xi_n = 2\} = \mathbb{P}\{\xi_n = 0\} = \frac{1}{2}$.

1) Montrer que X_n est une martingale.

2)Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

3) Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ par récurrence sur n.

4) Que peut-on en déduire sur la convergence dans L^2 de X_n?.

5)Déterminer le processus croissant $\langle X \rangle_n$.

6) On suppose que le joueur mise à chaque tour la totalité de son capital, c'est-à-dire $\lambda = 1$.

- Calculer explicitement la loi de X_n.

Exercice 2:

Soit $X_0 = 1$. On définit une suite $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ récursivement en posant que pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi uniforme sur $]0, 2X_{n-1}]$ (c-à-d $X_n = 2U_nX_{n-1}$ où les U_n sont i.i.d. de loi uniforme sur $]0, 1]$).

1) Montrer que X_n est une martingale.

2) Calculer le processus croissant $\langle X \rangle_n$ et discuter la convergence de X_n dans L^2.

3) Discuter la convergence presque sûre de X_n.