حل السلسلة الأول: دالة الإنتاج في الفترة القصيرة

*حل التمرين الأول:

1/حساب الناتج الحدي و المتوسط لعنصر العمل L:

أ/ حساب الناتج الحدي لعنصر العمل L:

$$Pm = \frac{\Delta PT}{\Delta L} \Rightarrow Pm_1 = \frac{PT_1 - PT_0}{L_1 - L_0} = \frac{6-0}{1-0} = 6$$

$$Pm = \frac{\Delta PT}{\Delta L} \Rightarrow Pm_2 = \frac{PT_2 - PT_1}{L_2 - L_1} = \frac{12-6}{2-1} = 6$$

$$Pm = \frac{\Delta PT}{\Delta L} \Rightarrow Pm_3 = \frac{PT_3 - PT_2}{L_3 - L_2} = \frac{20-12}{3-2} = 7$$

ب/حساب الناتج المتوسط لعنصر العمل L:

$$PM = \frac{PT}{L} \Rightarrow PM_1 = \frac{PT_1}{L_1} = \frac{6}{1} = 6$$

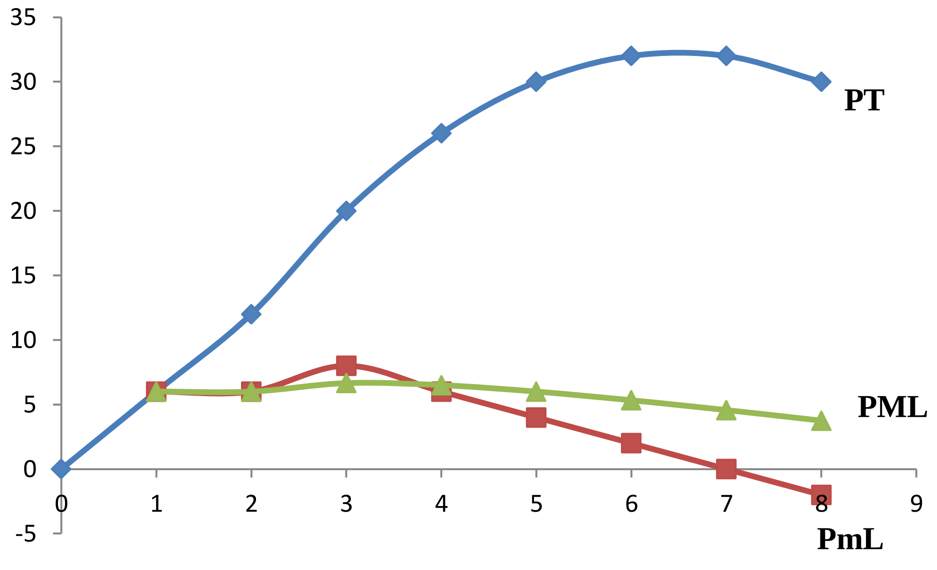
$$PM = \frac{PT}{L} \Rightarrow PM_2 = \frac{PT_2}{L_2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$PM = \frac{PT}{L} \Rightarrow PM_3 = \frac{PT_3}{L_3} = \frac{20}{3} = 6,33$$

والجدول التالي يوضح القيم المحسوبة:

8	7	6	5	4	3	2	1	0	L
30	32	32	30	26	20	12	6	0	Q
2-	0	2	4	6	8	6	6	-	Pm
3,75	4,57	5,33	6	6,5	6,66	6	6	-	PM

***التمثيل البياني:**



2/مفهوم مردودية الهكتار المستعملة في المجال الفلاحي تعني الإنتاج المتوسط PM لأن مردودية الهكتار تحسب بواسطة قسمة المخرجات على المدخلات أي قسمة الإنتاج الكلي PT على مساحة الأرض المزروعة وهي العنصر الإنتاجي K وتصبح مردودية الهكتار تساوي : $\frac{PT}{L}$ في مثالنا مساحة الأرض هي 2 هكتار وتحسب:

$$PM = \frac{PT}{L} \Rightarrow PM_{k_1} = \frac{PT}{L} = \frac{6}{3} = 3$$
$$PM = \frac{PT}{L} \Rightarrow PM_{k_2} = \frac{PT}{L} = \frac{12}{2} = 3$$

3/النصائح المقدمة في حالة إنتاج حدي موجب، معدوم، وسالب.

يعرف الإنتاج الحدي على أنه التغير الحاصل في الإنتاج الكلي نتيجة زيادة استخدام وحدة واحدة من العنصر الانتاجي المتغير هذا التغير يمكن أن يكون موجب pm>0، وهنا يرتفع الناتج الكلي مع استخدام وحدات إضافية من العمل (حسب التمرين عندما ينتقل L من 5 إلى 6، pm=2>0) وتحدث هذه الزيادة في الإنتاج الكلي نظرا لزيادة لإستغلال المثل للعنصر الإنتاجي الثابت بلإضافة إلى زيادة التخصص ومن مصلحة المزارع هنا زيادة عدد الوحدات المستخدمة من L، أما في حالة إنتاج حدي سالب يعني زيادة إستخدام عنصر إضافي من L، يؤدي إلى إنخفاض الإنتاج الكلي في التمرين الإنتقال من 7 إلى 8 فإن PT ينتقل من 32 إلى 30 ومن مصلحة المزارع التخلص من فائض العمالة، وأما في حالة إنتاج حدي معدوم يكون الإنتاج الكلي عند أقصى قيمة له (انتقال L من 6 إلى 7) حيث تكون مساهمة العنصر الواحد من العمل في العملية الإنتاجية معدومة وهنا يجب على المزارع التوقف عن طلب وحدات إضافية من العنصر L.

4/تعتبر مرحلة تناقص الإنتاج الحدي أفضل من مرحلة تزايده لأن مرحلة تناقصه تعبر على الإستغلال الأمثل للطاقة الإنتاجية لعوامل الإنتاج فعند بداية العملية الإنتاجية (وهي مرحلة تزايد Pm) تكون نسبة العمل إلى الأرض ضعيفة مما يؤدي إلى عدم إستغلال الأمثل للعنصر K لكن مع زيادة L سوف يؤدي إلى زيادة إستغلال الأرض وزيادة الإنتاج يصبح معه pml متناقص.

حل التمرين الثاني

1/ تحديد حجم العمال اللازم لبلوغ الإنتاج الكلي أقصى قيمة له مع تحديد كمية هذا الإنتاج

الحصول على أكبر ناتج $(Max : PT)$ يعني إنعدام PmL

$$Max: PT \Rightarrow PmL = 0$$
$$PmL = \frac{\delta PT}{\delta L} = (20L^2 - 2L^3)'$$
$$PmL = 40L - 6L^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow L(40-6L) = 0 \Rightarrow L = 0, (40-6L) = 0$$
$$\Rightarrow 40 - 6L = 0 \Rightarrow 40 = 6L \Rightarrow L = \frac{40}{6} = 6.66$$

عدد العمال الازم لبلوغ الناتج الكلي أقصى قيمة له هو : $L = 6,66 \simeq 7$

والإنتاج الكلي المقابل لذلك هو: $Q = 20(6,66)^2 - 2(6,66)^3 = 296,29$

2/لدينا حجم الطلب السوقي هو 350 وحدة من Q إذن: $350 - 296.29 = 53.71$

إذن لا تستطيع المؤسسة أن تلبي جميع طلبات السوق.

3/تحديد عدد العمال اللازم لبلوغ الناتج الحدي أقصاه(نقطة الإنعطاف):

$$Max: PmL \Rightarrow \frac{\delta PmL}{\delta L} = 0$$

لدينا: $PmL = 40L - 6L^2$

$$PmL' = \frac{\delta PmL}{\delta L} = 40 - 12L = 0$$
$$\Rightarrow 40 = 12L \Rightarrow L = 3,33$$

ومنه الإنتاج الكلي المقابل لذلك هو: $Q = 20(3.33)^2 - 2(3.33)^3 = 147.92$

4/اثبات أن: Max PM=Pm

نعلم أن الشرط الازم لتعظيم أي دالة هو أن مشتقها يكون مساوي للصفر:

لدينا:

$$PML = \frac{Q}{L}$$
$$Max: PML = \frac{\delta PML}{\delta L} = 0$$
$$\frac{\frac{\delta Q}{\delta L} \cdot L - (1)Q}{L^2} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{\delta Q}{\delta L} \cdot L}{L^2} - \frac{Q}{L^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\frac{\delta Q}{\delta L} \cdot \cancel{L}}{L^{\cancel{2}}} = \frac{Q}{L^2} \Rightarrow \frac{\frac{\delta Q}{\delta L}}{L} = \frac{Q}{L^2} \Rightarrow \frac{\delta Q}{\delta L} = \frac{Q\cancel{L}}{L^{\cancel{2}}}$$
$$\Rightarrow \frac{\delta Q}{\delta L} = \frac{Q}{L}$$

5/تحديد عدد العمال الذي يكون عنده PmL=PML

كما سبق وأن بيناه في المطلوب السابق يتقاطع منحنى الناتج الحدي مع منحنى الناتج المتوسط عندما يبلغ هذا الأخير حده الأقصى ومنه نجد قيمة L بطريقتين هما:

$Max : PML \Rightarrow \frac{\delta PML}{\delta L} = 0$ أو $PmL = PML$

الطريقة الأولى:

$$PML = \frac{PT}{L} = \frac{20L^2 - 2L^3}{L} = 20L - 2L^2$$

$$PmL = \frac{\delta PT}{\delta L} = 40L - 6L^2$$

$$\Rightarrow 20L - 2L^2 = 40L - 6L^2$$

$$\Rightarrow 20L - 2L^2 - 40L + 6L^2 = 0 \Rightarrow -20L + 4L^2 = 0$$

$$L(-20 + 4L) = 0 \Rightarrow L = 0$$

$-204L = 0$و أ

$$\Rightarrow L = 5$$

كمية الإنتاج عند نقطة التقاطع هي:

$$Q = 20(5)^2 - 2(5)^3 = 250$$

الطريقة الثانية:

$$Max : PML \Rightarrow \frac{\delta PML}{\delta L} = 0$$

$$\frac{\delta PML}{\delta L} = (20L - 2L^2)' = 0 \Rightarrow 20 - 4L = 0$$

$$\Rightarrow L = 5$$

*حل التمرين الثالث:

لدينا دالة الإنتاج المتوسط: $PML = 60L - 3L^2$

أ/تحديد دالة الإنتاج الكلي:

$$PML = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = PML.L$$

أي:

$$Q = (60L - 3L^2)L$$

$$\Rightarrow Q = 60L^2 - 3L^3$$

ب/دالة الإنتاج الحدية:

2 $PmL = \frac{\delta Q}{\delta L} \Rightarrow PmL = 120L - 9L^2$

2/تحديد مراحل الإنتاج:

أ/المرحلة الأولى: $L \in [0, Max:PML[$

إذن:

$$Max:PML \Rightarrow \frac{\delta PML}{\delta L} = 0 \Rightarrow (60L - 3L^2)' = 0$$

$$\Rightarrow 60 - 6L = 0 \Rightarrow \frac{60}{6} = 10$$

أي أن المرحلة الأولى تمتد: $L \in [0,10[$

ب/المرحلة الثانية: $L \in [Max:PML, Max:PT[$

$$Max:PT \Rightarrow PmL = 0 \Rightarrow \frac{\delta Q}{\delta L} = 0$$

$$\Rightarrow 120L - 9L^2 = 0 \Rightarrow L = 0$$

أ

$$120 - 9L + 0 \text{ و}$$

$$L = \frac{120}{9} = 13.33$$

أي أن المرحلة الثانية تمتد: $L \in [10, 13.33[$

ج/المرحلة الثالثة: وهي مرحلة مابعد 13.33.

*تحديد المنطقة الإنتاجية المثلى: تمثل المرحلة الثانية للإنتاج المنطقة الإقتصادية المثلى لأن في هذه المرحلة يكون حجم العمل يتناسب مع حجم رأس المال الشيء الذي يحقق الإستغلال الأمثل لعنصري الإنتاج ويجعل الإنتاجية الحدية لهما موجبة حتى وإن كانت متناقصة. ولا يمكن تحديد التوليفة L، وk، بالظبط مالم ندخل عامل الأسعار في الصورة.