

Chapitre 3

Free systems damped to one degree of freedom

III.1.Introduction :

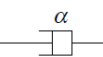
In damped oscillations, friction forces are taken into account. Friction is viscous and speed dependent.

The friction forces have the following form $f = -cv$

with:

c : is the coefficient of friction.

v : is the speed

The shock absorber is schematiz 

III.2. Équation du mouvement

III.2.1.Equation de Lagrange

Reprenons l'exemple masse-ressort soumis à une translation dans la direction (x) en présence des forces de frottement, en utilisant l'équation de Lagrange pour aboutir à l'équation différentielle du mouvement s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2$$

On définit la fonction de dissipation par :

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2$$

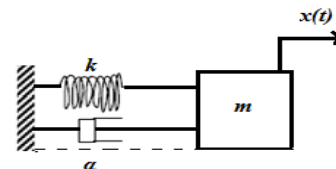


Figure II.2 Exemple d'un système masse-ressort-amortisseur

L: Le Lagrangien du système est donné par $L = T - U$

q: La coordonnée généralisée, dans ce cas $q \equiv x$

L'énergie cinétique du système : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

L'énergie potentielle du système : $U = \frac{1}{2} kx^2$

L'énergie de dissipation est. : $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2$

La fonction de Lagrange: $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$

Donc

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = k\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \end{cases} \Rightarrow m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0$$

Qui est une équation différentielle linéaire du second ordre Plus généralement, pour une coordonnée généralisée q elle s'écrit

$$q + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 = 0$$

Avec:

δ : est le coefficient d'amortissement.

ω_0 : est la pulsation libre.

III.2.2. Résolution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle dépend de la valeur de δ par rapport à ω_0 . On distingue trois régimes : le régime apériodique, le régime critique et le régime pseudo périodique.

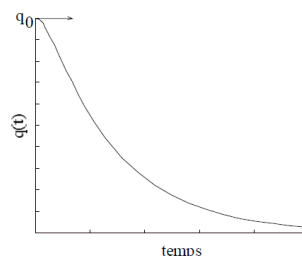
Le régime est apériodique (fortement amorti)

- si $\delta > \omega_0$ Régime fortement amorti, dans ce cas le système n'effectue plus de mouvement oscillatoire et le système retourne directement vers l'équilibre sans aucune oscillation et solution de l'équation différentielle du mouvement prend la forme suivante :

$$q(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure III -2 représente la solution $q(t)$ en fonction du temps .

Fig. III -2. Variation de $q(t)$ en fonction du temps pour le régime fortement amorti (sur amorti)



- Si $\delta = \omega_0$ le régime est critique (Figure III -3), et la solution est de la forme:

$$q(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\sigma t}$$

On utilise les conditions initiales pour trouver les deux constantes A et B.

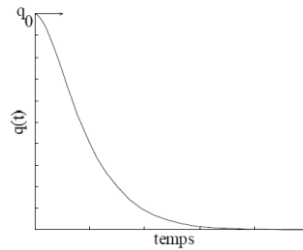


Fig. III-4. Variation de $q(t)$ en fonction du temps pour le régime critique

- Si $\delta < \omega_0$ Régime faiblement amorti, la solution de l'équation différentielle du mouvement prend la forme Tel que

$$q(t) = e^{-\sigma t} \cos(\omega_a t - \varphi)$$

Tel que $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$. est le battement du système amorti

On définit la période du système T appelé pseudo-période comme suit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_a}$$

III.3.Coefficient de frottement critique

Le coefficient de frottement critique est défini comme la valeur du coefficient de frottement qui est à $\Delta=0$ c'est-à-dire

$$\left(\frac{c_c}{m}\right)^2 = 4 \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_0$$

III.4.Rapport d'amortissement

Le rapport d'amortissement est défini comme le rapport du coefficient de frottement au coefficient de frottement critique.

$$\varepsilon = \frac{c}{c_c} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2m} = \varepsilon \omega_0$$

III.5.Le facteur de qualité

Le facteur de qualité est défini par $Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{\omega_0}{2\sigma}$

Avec

E : L'énergie de l'oscillateur harmonique.

ΔE : est l'énergie dissipée pendant un cycle.

Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est grande. Or Q est d'autant plus grand, à ω_0 donné, que l'amortissement est faible, d'où le nom de facteur de qualité.

III.6. La période du système pseudo-période

On définit la pulsation du système faiblement amorti comme suit:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Donc la période du système est $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$

III.7. Le décrétement logarithmique

Le décrétement logarithmique est défini comme le taux de diminution de l'amplitude du mouvement vibratoire. Mathématiquement, le décrétement logarithmique est donné par le logarithme naturel de deux amplitudes successives.

$$D = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \ln \frac{Ae^{-\sigma t} \cos(\omega_a t - \varphi)}{Ae^{-\sigma(t+T_a)} \cos(\omega_a (t+T_a) - \varphi)}$$

Avec: Avec: $\omega_a T_a = 2\pi$

Donc : Donc : $\cos(\omega_a (t+T_a) - \varphi) = \cos(\omega_a t - \varphi)$

Alors : Alors : $D = \ln \frac{Ae^{-\sigma t}}{Ae^{-\sigma(t+T_a)}} = \ln e^{-\sigma T_a} \Rightarrow D = \delta T_a$

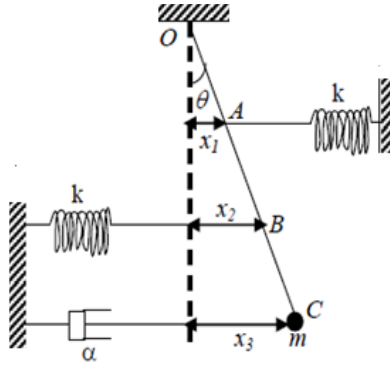
III.8. L'énergie dissipée

A cause de la force de frottement, le système subit **une perte d'énergie totale due au travail des forces de frottement**

$$dE_T(t) = -dw_{fr}$$

Exemple:

- 1- Retrouver l'équation différentielle du mouvement la solution de l'équation différentielle dans le cas des petites amplitudes pour le système de la figure ci-contre avec ($OA = AB = BC = L/3$) Trouver l'équation différentielle du mouvement.



Solution

1-L'équation du mouvement de ce système est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$$

- Le Lagrangien: $L = T - U$
- $T = \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2$ avec $x_3 = l \sin \theta \approx l \theta \Rightarrow \dot{x}_3 = l \dot{\theta} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$
- $U = U_1 + U_2$

U_1 est l'énergie potentielle du ressort de raideur k_1 , U_2 est celle du ressort k_2 .

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 & \text{avec } x_1 = \frac{l}{3} \theta \Rightarrow U_1 = k_1 \left(\frac{l}{3} \right)^2 \theta^2 \\ U_2 = \frac{1}{2} k_2 x_2^2 & \text{avec } x_2 = \frac{2l}{3} \theta \Rightarrow U_2 = k_2 \left(\frac{2l}{3} \right)^2 \theta^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = k_1 \left(\frac{l}{3} \right)^2 \theta^2 + k_2 \left(\frac{2l}{3} \right)^2 \theta^2$$

- La fonction de dissipation: $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}_3^2 = \frac{1}{2} \alpha l^2 \dot{\theta}^2$

Le Lagrangien s'écrit:

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - k_1 \left(\frac{l}{3} \right)^2 \theta^2 - k_2 \left(\frac{2l}{3} \right)^2 \theta^2$$

Donc l'équation du mouvement est

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{k}{m} \right) \theta = 0$$