***Série de TD N°4 : Dualité***

**Exercice 1.**

La version du programme que nous allons utiliser dans la résolution géométrique est :

Max Z=3$x\_{1}$-$x\_{2}$
$$\left\{\begin{array}{c}2x\_{1}+x\_{2}\geq 2\\x\_{1}+3x\_{2}\leq 3\\x\_{1}+x\_{2}\geq 1\\x\_{1},x\_{2},x\_{3}\geq 0\end{array}\right.$$

Les point extrême sont A(1,0) ; B(3,0) et C(3/5,4/5)

ZA= 3, ZB= 9, ZC=1 donc la solution optimale est :

Z\*=9, x1\*=3,x2\*=0 .

Le dual D de P est le suivant :

Min w=$2y\_{1}$+3$y\_{2}$+$y\_{3}$
$$\left\{\begin{array}{c}-2y\_{1}+y\_{2}-y\_{3}\geq 3\\-y\_{1}+3y\_{2}-y\_{3}\geq -1\\y\_{1},y\_{2}\geq 0\end{array}\right.$$

Selon le théorème des écarts complémentaires on a :

C1 : 2\*3+3\*0 =6>2 CR=> y1=0

C2 : 3+3(0)=3 CS => y2>0

C3 :3+0=3>1 CR => y3=0

X1>0 $(-2y\_{1}+y\_{2}-y\_{3}\geq 3$ est serrée) don on met $-2y\_{1}+y\_{2}-y\_{3}=0$ tandis que x2=0 donc $-y\_{1}+3y\_{2}-y\_{3}\geq -1$ est relâchée.

Par substitution on obtient :

Y2=3 et W=9= Z\*.

La solution optimale du dual est :

y1\*=y3\*=0, y2\*=3, W\*=9.

**Exercice 2.**

Soit le programme linéaire suivant :

 

Laquelle des deux bases suivantes {2, 5, 6}, {1, 3, 6} est optimale ? dire pourquoi et donner sa solution.

Ecrire le dual de ce programme linéaire et lui en déduire une solution optimale ?

1. La solution relative a la base 1 :

x2=2, x1=x3=x4=0, x5=1, x6=2, Z1=2

La solution relative a la base 2 :

X1=1/5, x2=x4=x5=0, x3=8/5, x6=4, Z2=27/5 don Z2>Z1, il suffit de vérifier l’optimalité de la deuxième base.

On a :

B2=$\left(\begin{matrix}2&1&0\\1&3&0\\2&1&1\end{matrix} \right)$ B2-1=$\left(\begin{matrix}3/5&-1/5&0\\-1/5&2/5&0\\-1&0&1\end{matrix} \right)$

B2-1\*b=$\left(\begin{matrix}3/5&-1/5&0\\-1/5&2/5&0\\-1&0&1\end{matrix} \right)\left(\begin{matrix}2\\5\\6\end{matrix} \right)$=$\left(\begin{matrix}1/5\\8/5\\4\end{matrix} \right)$

B2-1\*A=$\left(\begin{matrix}3/5&-1/5&0\\-1/5&2/5&0\\-1&0&1\end{matrix} \right)\left(\begin{matrix}1&1&0\\2&0&1\\2&0&0\end{matrix} \right)$=$\left(\begin{matrix}1/5&3/5&-1/5\\3/5&-1/5&2/5\\1&-1&0\end{matrix} \right)$

Donc :

X1=1/5-(1/5)x2-(3/5)x4+(1/5)x5

X3=8/5-(3/5)x2+(1/5)x4-(2/5)x5

X6=4-x2+x4

Par substitution dans l’expression de Z on obtient :

Z=3(1/5-1/5x2-3/5x4+1/5x5)+ x2+3(8/5-3/5x2+1/5x4-2/5x5)=27/5-7/5x2-6/5x4-3/5x5.

Tous les coefficients dans Z sont négatifs donc la solution est optimale.

Le dual est le suivant :

Min W=2$y\_{1}$+$5y\_{2}$+$6y\_{3}$
$$\left\{\begin{array}{c}2y\_{1}+y\_{2}+2y\_{3}\geq 3\\y\_{1}+2y\_{2}+2y\_{3}\geq 1\\y\_{1}+3y\_{2}+y\_{3}\geq 3\\y\_{1},y\_{2},y\_{3}\geq 0\end{array}\right.$$

x1=1/5>0 C1 est serrée. X2=0 C2 est relâchée. X3=8/5.0 C3 est serrée.

x4=x5=0 => y1>0 et y2>0, x6=4>0=> y3=0

**Par substitution on obtient :**

2y1+y2=3, y1+3y2=3 => y2=3/5, y1=6/5, y3=0, W=2\*6/5+5\*3/5=27/5

W\*=Z\*=> la solution est optimale.

**Exercice 3.**

Le programme dual (D) est :

Min W=$3y\_{1}$+10$y\_{2}$+ $8y\_{3}$

$\left\{\begin{array}{c}2y\_{1}+y\_{2}+3y\_{3}\geq 4.5\\y\_{1}-2y\_{2}+2y\_{3}\geq 2.5\\2y\_{2}+y\_{3}\geq 1\\y\_{1}+2y\_{3}\geq 3\\y\_{1},y\_{2},y\_{3}\geq 0\end{array}\right.$

La solution optimale de (D) est :

$y\_{1}=1,y\_{2}=0, y\_{3}=1$ (Les coefficients des variables d’écarts dans Z)

Si C4=4 la solution du primal est le suivant :

X1=0, x2=0, x3=2, x4=3, x5=0, x6=6, x7=0

Le théorème des écarts complémentaire donne :

Max Z=4.5$\*0$+2.5\*0+ $2$+4\*$3$=14

$\left\{\begin{array}{c}2\*0+0+3=3 y\_{1}>0\\0-2\*0+2\*2=4<10 y\_{2}=0\\3\*0+2\*0+2+2\*3=8 y\_{3}>0\\\end{array}\right.$

Application dans (D)

$\left\{\begin{array}{c}y\_{3}=1\\y\_{1}+2y\_{3}=4=> y\_{1}=2\end{array}\right.$

W=3\*2+8\*1=14 1pts