CHAÎNES DE MARKOV

Introduction

Les chaînes de Markov contient une classé importante de processus stochastiques à temps discrète elles permettant de modéliser de phénomènes aléatoires temporel probabiliste à tout instant depend que de l'état du système à cet instants et non de toute son evolution anterieur i.e. elles modelisent des phénomènes surs mémoire.
On se limite à l'étude de chaîne de Markov à un espace d'états (E) dénombrable.

Généralités

Dans la suite, on considère un processus aléatoires $\{X_t, t \in T\}$ à temps discret ($\mathbb{J} \subseteq \mathbb{Z}$) et un espace d'état discret.
:$\subseteq \mathbb{Z}$ (on notera plutot $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$) définit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans la plus part du temps $\mathbb{J} = \mathbb{N}$.

Définition

Un processus $\{X_n, n \in \mathbb{N}\{$ à temps discret est dit chaîne de Markov si $\mathbb{P}(X_{n+1} = i+1)X_n = i, X_{n-1} = i-1, \cdots, X_0 = i = \mathbb{P}(X_{n-1} = i+1 | X_n = i_n)$ $\forall i, j \in E$, tq $j = O, \bar{n} + 1$

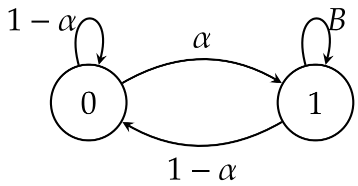
Définition

Probabilité de transition

$$\mathbb{P}_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

Définition

Un grémeau est soit vide soit plein suivant qui il contient ou moin un poquet :



La matrice de transition :

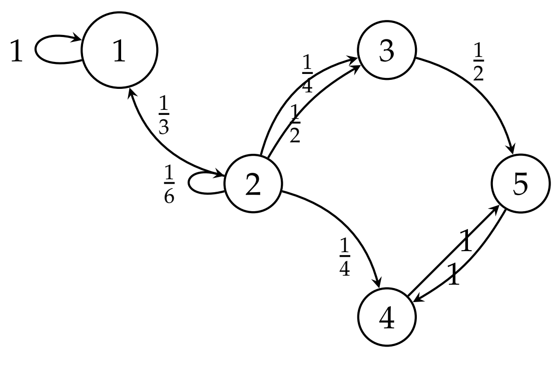
$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Matrice est diagramé de transition. Nous pouvons ecrire la matrice de transition de la chaîne en utilisant la notion suivante :

$$P \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ P_{m0} & P_{m2} & \cdots & P_{mn} \end{pmatrix}$$

si E est fini.

Exemple



Le diagrame $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition

P est une matrice stochastique si : $\sum \mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i) = \sum_j \mathbb{P}_{ij} = 1$.

Proposition

Les distributions fini dimensionnelle d'une chaîne de Markov sont emtoienent déterminées à partie de la distribution marginales de X_0, $(\mathbb{P}_{X_0}(.))$ et les probabilites de transition.

$$\begin{aligned} P_{ij}(x_1, n+1) &= P(X_{n+1} = j|X_n = i) \\ &= P(X_0 = i_0, X_1 = i_1|X_2 = i_2 \cdots X_n = i_n) \\ &= P(X_0 = i_0).P_{i_0 i_1}(0,1)P_{i_1 i_2}(1,2) \cdots P_{i_{n-1} i_n}(n-1, n) \end{aligned}$$

Preuve

$\mathbb{P}(X = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = \cdots = X_0 = i_0)$

$\mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-1} = i_{n-1}, cdots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_n = i_n|X_{n-1}).\mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}|X_{n-2} = i_{n-2} \cdots)$

$\mathbb{P}(X_{n-2} = i_{n-2}, \cdots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}_{n-1}, n, \mathbb{P}_{n-2}, n-1$

$= \mathbb{P}_{n-1}, n\mathbb{P}_{n-2}, n-1 \cdots \mathbb{P}(X_0 = i_0)$

$= \mathbb{P}(X_0 = i_0).\mathbb{P}_{i_0 i_1}(0,1)\mathbb{P}_{i_1 i_2}(1,2) \cdots \mathbb{P}_{ij}(n-1, n)$

Théorème (equation de chap-man-Kolmogorov)

Si $\mathbb{P}_{ij}^{(n)}$ les probabilités de transition en n étapes, alors :

$$\mathbb{P}_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} \mathbb{P}_{ik}^{(n)} \cdot \mathbb{P}_{kj}^{(m)}, \ \forall i, j, k \in E \, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Preuve

On a $\mathbb{P}_{ij}^{(n+m)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j|X_0 = i)$

où l'événement $\{X_{n+m} = j\}$ sachant $\{X_0 = i\}$ peut s'écrit :

$$\begin{aligned}
\{X_{n+m}=j\} &= \{X_{n+m}=j\}\cap\Omega \\
&= \{X_{n+m}=j\}\cap\left(\cup_{k\in E}\{X_n=k\}\right) \\
&= \cup_{k\in E}\left(\{X_{n+m}=j\cap X_n=k\}\right)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{ij}^{(n+m)} &= \mathbb{P}(X_{n+m}|X_0=i) \\
&= \sum_{k\in E}\mathbb{P}(X_{n+m}=j,X_n=k,X_0=i) \\
&= \sum_{k\in E}\mathbb{P}(X_{n+m}=j,X_n=k,X_0=i)\mathbb{P}(X_n=k|X_0=i) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X_n=k|X_0=i).\mathbb{P}(X_{n+m}=j|X_n=k) \\
&= \sum_{k\in E}\mathbb{P}_{ik}^{(n)}-\mathbb{P}_{kj}^{(m)}
\end{aligned}$$

Ce théorème est extensible aux matrices de transition comme suit : Soit $\mathcal{P}^{(2)}=\left(P_{ij}^{(2)}\right)_{i,j\in E}$ la matrice de transition en deux étapes.

Quelques exemples de C.M

Processus de Bernoulli

Expérience aléatoire à deux issues possibilités succès et échec répète infiniment (sans cesse) de sorte que les issus successives sont indépendants les unes des autres. L'espace fondamental : $\Omega=\{\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots)\ \text{tq}\ \omega_i=s\vee e,\ i\in\mathbb{N}^*\}$ et $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$.
La mesure de probabilité $\mathbb{P}(.)$ définit sur $\mathcal{F}$ tq :

$$\forall\omega\in\Omega,\mathbb{P}(\{\omega\})=\prod_{i\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}(\{\omega_i\})$$

avec :

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\})=\begin{cases} p\in[0,1] & si\ \omega_i=s \\ 1-p & si\ \omega_i=e\end{cases}$$

Donc $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ constitue l'espace de probabilité associé à cette expérience.
On considère le processus aléatoire $\{X_n,n\in\mathbb{N}\}$ dont les membres X_n sont :

$$X_n : \Omega \longrightarrow \{0.1\}$$
$$\omega \longmapsto X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_i = s \\ 0 & \omega_i = e \end{cases}$$

On dit que $\{X_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est le processus aléatoire de Bernoulli de taux p et on écrit $(X_n) \sim B(p)$ si :

1) Les v.a. $X_1, X_2, \cdots$ sont indépendantes.

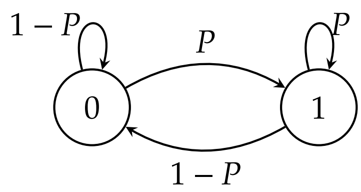
2) Les v.a. $X_1, \cdots, X_n$ sont de même loi c-à-d :$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3) $E = \{0, 1\}$, il est clair que ce processus est une C.M car : $\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0)$
$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$.

4) La matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

son graphe :



Classification des états :Décomposition en classes

Les états d'une C.M se répartissent en classes que l'on définit à partir de la matrice de transition.

Définition

On dit que l'état j est accessible à partir de l'état i, ou est conséquent de l'état i, si $\exists n \geq 0$ tq :$P_{ij}^{(n)} > 0$, on écrit : $i \rightsquigarrow j$.

Proposition

La relation d'accessibilité entre les états **réflexible** et **transitive**.

Preuve

Comme $P_{ii}^{(0)} = \mathbb{P}(X_0 = j | X_0 = i) = 1, \forall i \in E \Longrightarrow i \rightsquigarrow i$

En suite : si $i \rightsquigarrow l$ et $l \rightsquigarrow j \Longrightarrow i \sim j$

$\exists n \geq 0$ tq $P_{il}^{(n)} > 0$ et $\exists m \geq 0$ tq $P_{lj}^{(m)} > 0$

D'après la relation de chap-man-Kolmogorov :

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} \cdot P_{kj}^{(m)} \geq P_{il}^{(n)} \cdot P_{lj}^{(m)} > 0$$

D'où la transitivité.

Proposition

Soient i, j deux états, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

— L'état j est accessible à partir de l'état i :$i \rightsquigarrow j$.

— Le processus, partant de i, passe par j avec une probabilité strictement positive.

Preuve

(comme un exercice)

Définition

On dit que deux états i et j communiquent et l'on écrit $i \leftrightsquigarrow j$ si on a à la fois : $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow i$.

Proposition

La relation de communication entre états est une relation **d'équivalence**.

Remarque

1) En raison du fait que $\forall i \in E, P_{ii}^{(0)} = 1$ tout état communique avec lui.

2) Un état est appelé **état de retour** si $\exists n \geq 1, P_{ii} > 0$.

3) Il existe des états i tq : $\exists \geq 1$ (0 *exclu*), $P_{ii}^{(n)} = 0$, de tels états sont appelées états de non retour.

Exemple

Soit la C.M définit par $E = \{0, 1\}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On remarque que $\forall n \geq 1, P_{11}^{(n)} = 0$ alors l'état 1 est un état non retour.

4) Pour la relation de communication, l'ensemble E des états se partitionne en classes d'équivalences (disjoints et non vides), dites classes indécomposables.

Soit C_1 et C_2 deux classes distinctes, on peut éventuellement aller disons de C_1 à C_2, mais on ne peut pas retourner de C_2 à C_1.

En revanche, tous les états d'une même classe communiquent.

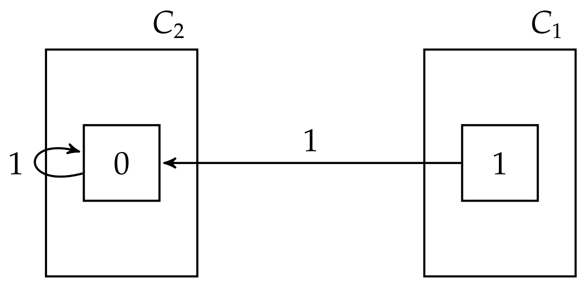
Certains classes peuvent ne comporter qu'un seul élément, ce sont les singletons, par exemple mentionnons :

— Un état de non retour i :

$$P_{ii}^{(0)} = 1,\ P_{ii}^{(n)} = 0, \quad \forall n \geq 1$$

— Un état absorbant i :

$$P_{ii}^{(0)} = 1,\ P_{ii}^{(n)} = 1, \quad \forall n \geq 1$$



par exemple l'état 0 dans la C.M précédente est un état absorbant car $\forall n \geq 0$, $P_{00}^{(n)} = 1$. Donc $E = \{C_1, C_2\}$ tq $C_1 = \{1\}$ et $C_2 = \{0\}$.

Définition

S'il n'y a qu'une seule classe pour la relation de communication, autrement dit, si tous les états communiquent entre eux, la C.M est dite **irréduvtible**.

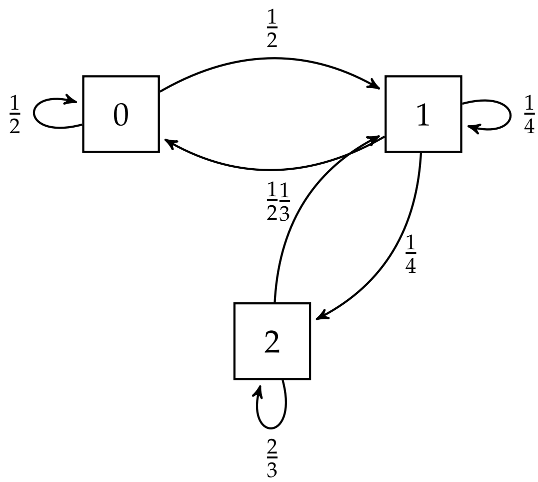
Par exemple : pour la C.M précédente, c'est une chaîne réductible.

Exemple

Soit la C.M dont $E = \{0, 1, 2\}$ et la matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

et le graphe associé :



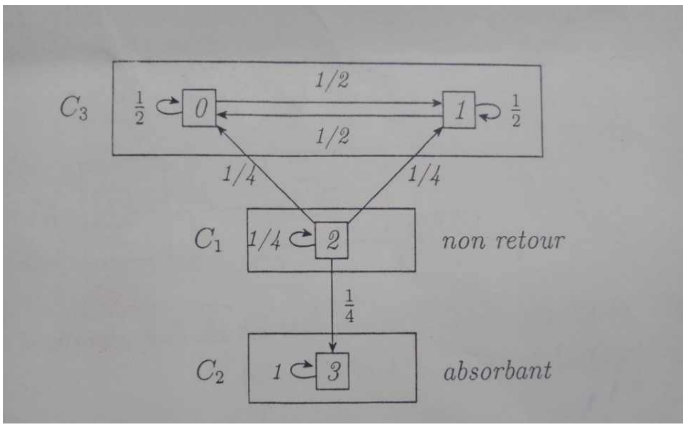
On remarque que tous les états communiquent entre eux malgré que :$P_{02} = P_{20} = 0$ mais $\exists n \geq 2\ tq P_{02}^{(n)} \neq 0$ et $P_{20}^{(n)} \neq 0 \Longrightarrow$ il existe une seule classe $E = \{0, 1, 2\}$.
alors la chaîne est irréductible.

Exemple

Soit la C.M dont $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et la matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que tous l'état 2 est un état de non retour et qui forme une classe $C_1 = \{2\}$



et l'état 3 est un état absorbant car $\forall n \geq 1$ tq : $P_{33}^{(n)} = 1$ qui forme une classe $C_2 = \{3\}$ et les états 0 et 1 communiquent entre eux donc $C_3 = \{0, 1\}$ alors la chaîne est réductible.

Remarque

Les classes $C_3 = \{0, 1\}$ et $C_2 = \{3\}$ sont des classes récurrentes mais la classe $C_1 = \{2\}$ est une classe transitent car l'état n'est plus visité après un certain temps.

Etats récurrents et transitents

Définition

Un état est récurrent s'il correspond à un sommet sans successeur. Dans le graphe si tel n'est pas le cas, l'état est dit transitent.
La classe qui contient un état transitent est dite transitoire et qui contient un état récurrent est dite récurrente.

Périodicité

Il s'agit d'étudier dans quelles conditions le temps qui sépare deux retours au même état j est ou n'est pas multiple d'un temps minimum. On introduit pour ce faire la notion de période.

Définition

Soit j un état de retour, on appelle période de j, le PGCD de tous les entiers $n \geq 1$ pour lequel $P_{ij}^{(n)} > 0$. On note $d(j)$ la période de j.

— Si $d(j) = d \geq 2$, on dit j est périodique de période d.

— Si $d(j) = 1$, on dit que j est apériodique.

— Si j est un état de non retour (à savoir que $\forall n \geq 1$, on a $P_{ij} = 0$), on pose $d(j) = +\infty$.

Théorème

Si i est périodique de période d finie et si $i \leftrightsquigarrow j$ tq $j \neq i$ alors j est aussi périodique de période d.
La propriété de périodicité est une propriété de classe.

Proposition

L'état j à période d ssi d est le plus grand diviseur commun des longueurs des circuits (pas forcement élémentaire) du graphe représentatif passant par j.

Proposition

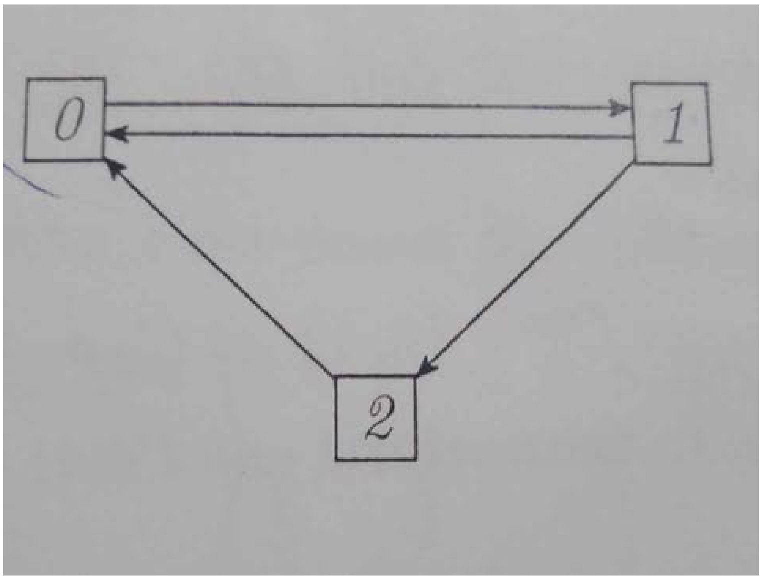
Si $P_{jj} > 0$, l'état j est apériodique.

Remarque

La périodicité étant une propriété de classe, on parlera de classes périodiques/apériodiques et des chaînes de Markov irréductibles périodiques/apériodiques, selon les propriétés de leurs états.

Exemple

Soit la C.M avec $E = \{0, 1, 2\}$ dont le graphe est donné par : C'est une chaîne irréductible



car on a une seule classe (tous les états communiquent).

L'état 0 est un état de retour, les circuits de l'état 0 sont

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 0$$

La période de 0 est $d(0) = PGCD(2, 3) = 1 \Longrightarrow$ l'état 0 est apériodique.

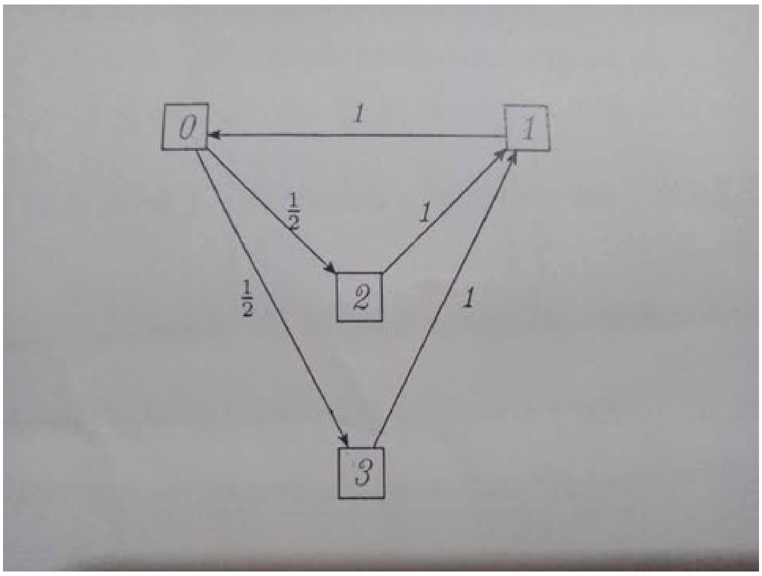
Comme on a une seule classe, tout les autres états sont apériodiques et la chaîne de Markov est irréductible apériodique.

Exemple

Considérons la C.M dont $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et la matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le graphe associé :



On remarque que tous les états communiquent entre eux, alors on a une seule classe $\{0, 1, 2, 3\}$, par suite la C.M est irréductible.
Prenons l'état 0 : $d(0) = PGCD(3, 3) = 3 = d < \infty$, $d(1) = 0$
d'où la classe est périodique de période 3.
$\Longrightarrow$ la C.M est irréductible et périodique.

Distribution initiale et comportement transitoire

Distribution initiale

La distribution des états d'une C.M après n transitions est notée $\pi^{(n)}$. Cette distribution est un vecteur de probabilités contenant la loi de la v.a. X_n telle que : $\pi_i^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = i), i \in E$.
La distribution initiale est $\pi^{(0)}$.

Remarque

Si l'état initiale est connu avec un certitude et il est égale à i, on a :

$$\begin{aligned} \pi_i^{(0)} &= \mathbb{P}(X_0 = i) = 1 \\ \pi_j^{(0)} &= \mathbb{P}(X_0 = j) = 0, \quad \forall j \in E \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

Comportement transitoire

Théorème

Soit P la matrice de transition d'une C.M et $\pi^{(0)}$ la distribution initiale, $\forall n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \pi^{(n)} &= \pi^{(n-1)} P \\ &= \pi^{(0)} P^{(n)} \end{aligned}$$

Exemple

Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une C.M à espace d'état $E = \{0, 1, 2\}$ à distribution initiale $\pi^{(0)} = (0.2, 0.5, 0.3)$ et à matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$$

1) $\pi^{(2)} = \left(\pi_0^{(2)}, \pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}\right), \forall i = \overline{0,2}$

D'après le théorème on : $\pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^{(2)}$ telle que :

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0.19 & 0.49 & 0.32 \\ 0.3 & 0.34 & 0.36 \\ 0.33 & 0.43 & 0.24 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \pi^{(2)} = (0.287, 0.397, 0.316)$

2) $\pi_2^{(1)} = \mathbb{P}(X_1 = 2)$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 2) &= \mathbb{P}(\{X_1 = 2\} \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1 = 2\} \cap \cup_{i=0}^2 \{X_0 = i\}) \\
&= \mathbb{P}(\cup_{i=0}^2 \{X_1 = 2\} \cap \{X_0 = i\}) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^2 \mathbb{P}(X_1 = 2, X_0 = i) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^2 \mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = i) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^2 \pi_i^{(0)} \cdot P_{i2}^{(1)} = \pi_0^{(0)} \cdot P_{02}^{(1)} + \pi_1^{(0)} \cdot P_{12}^{(1)} + \pi_2^{(0)} \cdot P_{22}^{(1)} \\
&= 0.28
\end{aligned}$$

Le même pour : $\pi_0^{(1)} = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \sum_{i=0}^2 \pi_i^{(0)} \cdot P_{i0}^{(1)} = 0.29$

$\pi_1^{(1)} = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \sum_{i=0}^2 \pi_i^{(0)} \cdot P_{i1}^{(1)} = 0.43$

3) $\pi_1^{(2)} = \mathbb{P}(X_2 = 1)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(\{X_2 = 1\} \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}(\{X_2 = 1\} \cap \cup_{i=0}^2 \{X_1 = i\}) \\
&= \mathbb{P}(\cup_{i=0}^2 \{X_2 = 1\} \cap \{X_1 = i\}) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^2 \mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = i) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^2 \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = i) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^2 \pi_i^{(1)} \cdot P_{i1}^{(1)} \\
&= 0.397
\end{aligned}$$

La 2^{me} méthode :

$$\begin{aligned}
\pi_1^{(2)} = \mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(\{X_1 = 2\} \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}(\{X_2 = 1\} \cap \cup_{i=0}^{2} \{X_0 = i\}) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(X_2 = i)\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = i) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{2} \pi_i^{(0)} \cdot P_{i2}^{(2)} \\
&= 0.397
\end{aligned}$$

4) $\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 0) = P_{02}^{(3)}$.

Il suffit de trouver :

$$P^{(3)} = P^3 = \begin{pmatrix} 0.29 & 0.44 & 0.28 \\ 0.26 & 0.42 & 0.32 \\ 0.3 & 0.38 & 0.33 \end{pmatrix}$$

alors $\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 0) = 0.28$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = 1|X_1 = 2) &= \tfrac{\mathbb{P}(X_0=1,X_1=2)}{\mathbb{P}(X_1=2)} \\
&= \tfrac{\mathbb{P}(X_0=1)\cdot\mathbb{P}(X_1=2|X_0=1)}{\mathbb{P}(X_1=2)} \\
&= \tfrac{\pi_1^{(0)}\cdot P_{12}^{(1)}}{\mathbb{P}(X_1=2)} \\
&= 0.357
\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1|X_1 = 1) \\
&= \pi_1^{(1)} \cdot P_{11}^{(2)} = 0.146
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 1|X_2 = 2, X_3 = 0) &= \tfrac{\mathbb{P}(X_1=1,X_2=2,X_3=0)}{\mathbb{P}(X_2=2,X_3=0)} \\
&= \tfrac{\mathbb{P}(X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_2=2|X_1=1)\mathbb{P}(X_3=0|X_1=1,X_2=2)}{\mathbb{P}(X_2=2,X_3=0)} \\
&= \tfrac{\mathbb{P}(X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_2=2|X_1=1)\mathbb{P}(X_3=0|X_1=1,X_2=2)}{\mathbb{P}(X_2=2)\mathbb{P}(X_3=0|X_2=2)} \\
&= \tfrac{\mathbb{P}(X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_2=2|X_1=1)}{\mathbb{P}(X_2=2)} \\
&= \tfrac{\mathbb{P}(X_1=1)\cdot P_{12}^{(1)}}{\pi_2^{(2)}} \\
&= 0.272
\end{aligned}$$

Exercice

Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une C.M à espace d'état $E = \{e_0, e_1\}$ à distribution initiale $\pi^{(0)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et à matrice de transition : $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

calculer $\mathbb{P}(X_1 = e_0, X_4 = e_1, X_6 = e_1, X_{18} = e_1 | X_0 = e_0)$, $\mathbb{P}(X_2 = e_1, X_7 = e_0, X_9 = e_1 | X_0 = e_0)$ et $\mathbb{P}(X_2 = e_0 | X_7 = e_1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = e_0, X_4 = e_1, X_6 = e_1, X_{18} = e_1 | X_0 = e_0) &= \mathbb{P}(X_1 = e_0 | X_0 = e_0)\mathbb{P}(X_4 = e_1 | X_0 = e_0, X_1 = e_0) \\
&\quad \mathbb{P}(X_6 = e_1 | X_0 = e_0, X_1 = e_0, X_4 = e_1) \\
&\quad \mathbb{P}(X_{18} = e_1 | X_0 = e_0, X_1 = e_0, X_4 = e_1, X_6 = e_1) \\
&= P^{(1)}_{e_0e_1}\mathbb{P}(X_4 = e_1 | X_1 = e_0)\mathbb{P}(X_6 = e_1 | X_4 = e_1) \\
&\quad \mathbb{P}(X_{18} = e_1 | X_6 = e_1) \\
&= P_{e_0e_1}P^{(3)}_{e_0e_1}P^{(2)}_{e_1e_1}P^{(12)}_{e_1e_1} .....\circledast
\end{aligned}$$

donc il faut calculer : $P^2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.36 & 0.64 \end{pmatrix}$, $P^3 = \begin{pmatrix} 0.38 & 0.62 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix}$ et $P^4 = \begin{pmatrix} 0.37 & 0.63 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix}$ alors $\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0.37 & 0.63 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix}$ donc $\circledast = 0.5(0.63)(0.64)(0.62) = 0.124$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = e_1, X_7 = e_0, X_9 = e_1 | X_0 = e_0) &= \mathbb{P}(X_2 = e_1 | X_0 = e_0)\mathbb{P}(X_7 = e_0 | X_0 = e_0, X_2 = e_1) \\
&\quad \mathbb{P}(X_9 = e_1 | X_0 = e_0, X_2 = e_1, X_7 = e_0) \\
&= P^{(2)}_{e_0e_1}\mathbb{P}(X_7 = e_0 | X_2 = e_1)\mathbb{P}(X_9 = e_1 | X_7 = e_0) \\
&= P^{(2)}_{e_0e_1}P^{(5)}_{e_1e_0}P^{(2)}_{e_0e_1} \\
&= 0.13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = e_0 | X_7 = e_1) &= \tfrac{\mathbb{P}(X_2=e_0, X_7=e_1)}{\mathbb{P}(X_7=e_1)} \\
&= \tfrac{\mathbb{P}(X_2=e_0)\cdot\mathbb{P}(X_7=e_1|X_2=e_0)}{\mathbb{P}(X_7=e_1)}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = e_0) = \sum_{i\in E} \pi_i^{(0)} \cdot P^{(2)}_{ie_0} = \pi^{(0)}_{e_0}P^{(2)}_{e_0e_0} + \pi^{(0)}_{e_1}P^{(2)}_{e_1e_0} = 0.37$$

$$\mathbb{P}(X_7 = e_1) = \sum_{i\in E} \pi_i^{(0)} \cdot P^{(7)}_{ie_1} = \pi^{(0)}_{e_0}P^{(7)}_{e_0e_1} + \pi^{(0)}_{e_1}P^{(7)}_{e_1e_1} = 0.63$$

donc :

$$\mathbb{P}(X_2 = e_0 | X_7 = e_1) = \frac{P^{(5)}_{e_0e_1}0.37}{0.63} = 0.37$$

Comportement asymptotique des C.M

Objectif et comportement asymptotique

L'étude du comportement à long terme d'une chaîne de Markov cherche à répondre à des questions aussi divers que :

- La distribution $\pi^{(n)}$ converge t-elle lorsque $n \longrightarrow \infty$?.
- Si la distribution $\pi^{(n)}$ converge lorsque $n \longrightarrow \infty$, quelle est la limite π^* ? et cette limite est-elle indépendante de la distribution initiale $\pi^{(0)}$?
- Si l'état i est récurrent, quelle est la proportion du temps passé dans cette état ? et quel est le nombre moyen de transitions entre deux visites successives de cet état ?
- Si l'état i est transitent, quel est le nombre moyen de visites de cet état ?

Définition(Distribution invariante)
Une distribution π est invariante ou stationnaire si $\pi = \pi P$.

Proposition
Si $\lim\limits_{n\to\infty} \pi^{(n)}$ existe, alors la limite est une distribution invariante.

Proposition
Une C.M possède toujours au moins une distribution invariante.

Théorème
Une C.M possède autant de distributions invariantes linéairement indépendantes que la multiplicité de la valeur propre 1 de sa matrice de transition.

Preuve(Exercice)

Théorème
La distribution $\pi^{(n)}$ des états d'une C.M converge vers une distribution (invariante) π^* indépendante de la distribution initiale $\pi^{(0)}$ ssi la suite des puissances de la matrice de transition P converge vers une matrice (stochastique) P^* dont toutes les lignes sont égales entre elles.
De plus, si tel est le cas, chaque ligne de P^* égale à π^*.

Preuve

La condition est nécessaire car si indépendamment de $\pi^{(0)}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \pi^*$, il suffit de considérer successivement les distributions initiales :

$$\begin{array}{rcl} \pi_1^{(0)} & = & (1,0,0,\cdots,0) \\ \pi_2^{(0)} & = & (0,1,0,\cdots,0) \\ \vdots & & \\ \pi_p^{(0)} & = & (0,0,0,\cdots,1) \end{array}$$

pour obtenir :

$$\begin{array}{rcl} \pi^* & = & \lim\limits_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \pi^{(0)} P^{(n)} \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} \pi_i^{(0)} P^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} (P^n)_i \\ & = & P_i^* \end{array}$$

ainsi P^* existe et toutes les lignes sont égales à π^*.

- La condition suffisante :

Si P^* existe et $P_{ij}^* = P_j^*, \forall i \in E$.

On a : $\lim\limits_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \pi^{(0)} P^{(n)} = \pi^{(0)} \lim\limits_{n\to\infty} P^n = \pi^{(0)} P^*$ et la limite π^* est existe.

De plus $\pi_j^* = \sum\limits_{i\in E} \pi_i^{(0)} P_{ij}^* = \sum\limits_{i\in E} \pi_i^{(0)} P_j^* = P_{ij}^* \pi_i^{(0)} = P_j^*$ et P^* est indépendante de la loi $\pi^{(0)}$ est identique à n'importe quelle ligne de P^*.

Remarque

Si $\pi^* = \lim\limits_{n\to\infty} \pi^{(n)}$, on parlera de distribution asymptotique stationnaire ou invariante.

Comportement asymptotique de C.M irréductible et apériodique

Théorème

Soit P la matrice de transition d'une C.M irréductible et apériodique, les propriétés suivantes sont vérifiées :

— La matrice $P^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P^*$ stochastique.

— Les lignes de P^* sont toutes égales entre elles.

— $P_{ij}^* > 0, \forall i, j \in E$.

— $\forall \pi^{(0)}$ distribution initiale, $\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \pi^{(0)} P^n = \pi^*$.

— π^* est la solution unique du système :

$$\begin{cases} \pi \cdot P = \pi \\ \pi \cdot \mathbb{1} = 1 \end{cases}$$

— π^* est égale à n'importe ligne de P^*.

— $\forall i \in E$, $\pi_i^* = \frac{1}{\mu_i}$ où μ_i est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i.

Remarque

Pour n suffisamment grand, on a $\pi^{(n)} \simeq \pi^*$ et π_i^* est la probabilité que la chaîne se trouve i à un instant quelconque. Cette valeur représente aussi la proportion du temps passé dans l'instant i.

Exemple

Soit chaîne de Markov à $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

de graphe :

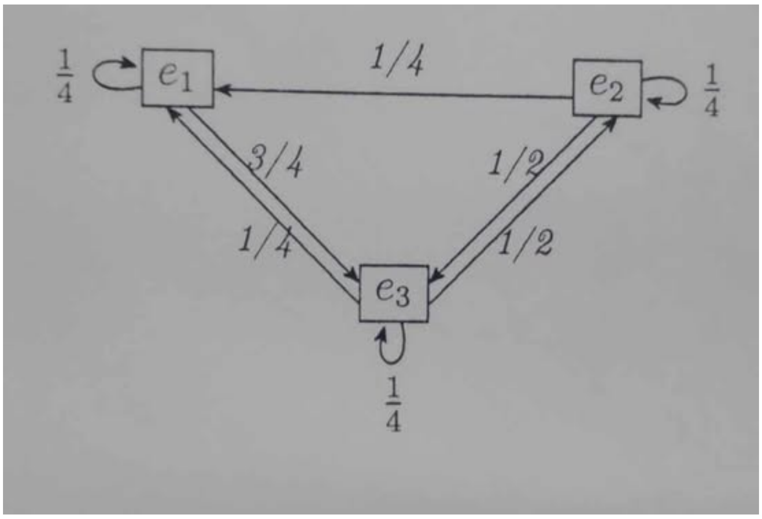
C'est une chaîne irréductible et apériodique.

Pour la périodicité, par exemple e_1 :

$$\begin{aligned} e_1 &\rightarrow e_1 \\ e_1 &\rightarrow e_3 \rightarrow e_2 \rightarrow e_1 \\ e_1 &\rightarrow e_3 \rightarrow e_3 \rightarrow e_1 \\ e_1 &\rightarrow e_3 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3 \rightarrow e_1 \end{aligned}$$

$d(e_1) = PGCD(1, 2, 3, 4, 5, \cdots) = 1$

D'après le théorème, la chaîne est irréductible et apériodique, donc $\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)}$ existe et



c'est la solution unique du système :

$$\begin{cases} \pi \cdot P &= \pi \\ \pi \cdot \mathbb{1} &= 1 \quad avec\ \pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \end{cases}$$

$$\pi \cdot P = \pi \Leftrightarrow (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

$$\pi \cdot \mathbb{1} = 1 \Leftrightarrow (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 = 0 \\ -\frac{3}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = 0 \\ \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 - \frac{3}{4}\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \cdots \circledast \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{5}{6}\pi_2 \\ \pi_3 = \frac{3}{2}\pi_2 \end{cases}$$

remplaçons π_1 et π_3 dans $\circledast$, on aura : $\pi_2 = \frac{3}{10} \Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{4}$ et $\pi_3 = \frac{9}{20}$

Alors : $\pi^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{9}{20}\right)$

Donc le processus passe en moyenne :

— 25 du temps dans l'état e_1.

— 30 du temps dans l'état e_2.

— 45 du temps dans l'état e_3.

ainsi, on a en moyenne, il faut 4 transitions entre deux visites successifs de l'état e_1.

Les chaînes ergodiques

Définition

Une C.M est ergodique si elle admet une distribution asymptotique c-à-d si $\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)}$ existe, unique et indépendante de la distribution initiale.

Proposition

Les chaînes irréductibles et apériodiques sont ergodiques.

Théorème(théorème ergodique)

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une C.M ergodique de distribution stationnaire π^* et f une fonction réelle définie sur l'espace des états E de la chaîne, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{i\in E} \pi_i^* f(i)$$

En particulier, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_j} f_{ij}$$

où : $f_{ij} = \mathbb{P}(\text{visite future à } j|\text{départ de } i)$

$\mu_j = \mathbb{E}(\text{temps de premier retour à } j|\text{départ de } j)$.