

الإستقرارية: تكون السلسلة العشوائية مستقرة إذا تذبذبت مستوياتها حول متوسط حسابي ثابت، مع تباين وتباين مشترك ليس لهم علاقة بالزمن؛ أي أن: السلاسل الزمنية المستقرة هي سلاسل لا توجد فيها تغيرات في النظام الأساسي (ثبات المتوسط، ثبات التباين، ثبات هيكل الارتباط الذاتي ولا توجد مركبة موسمية).

يقال ان السلسلة مستقرة إذا كانت الخصائص الإحصائية لها ثابتة خلال الزمن، أي أن هذه الخصائص لا تتغير بالإزاحة إلى الأمام أو الخلف.

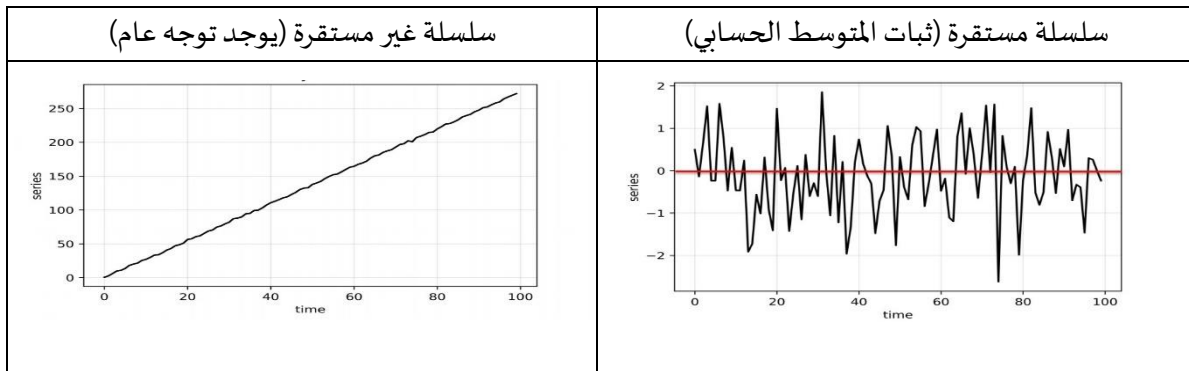
A stationary time series is a time series where there are no changes in the underlying system

$E(Y_t) = E(Y_{t+h}) = \mu$	✓ ثبات المتوسط عبر الزمن؛
$V(Y_t) = V(Y_{t+h}) = \gamma_0$	✓ ثبات التباين عبر الزمن؛
$Cov(Y_t, Y_{t+h}) = Cov(Y_{t+h}, Y_{t+h+s})$	✓ استقلال التباين المشترك عن الزمن.

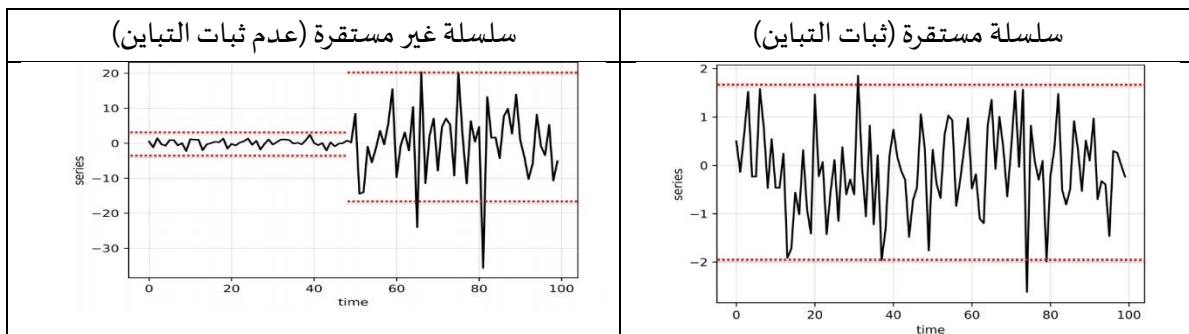
ملاحظة هامة: نشير إلى أنه توجد الاستقرار بالمعنى التام والاستقرارية بالمعنى الضيق، نركز هنا على الاستقرار بالمعنى الضيق.

إن التمثيل البياني يعطينا إشارات (اجاءات) عن استقرارية السلسلة من عدمها، غير أن التمثيل البياني لا يمكن الاعتماد عليه بل يجب اللجوء إلى الاختبارات الإحصائية المتخصصة لذلك.

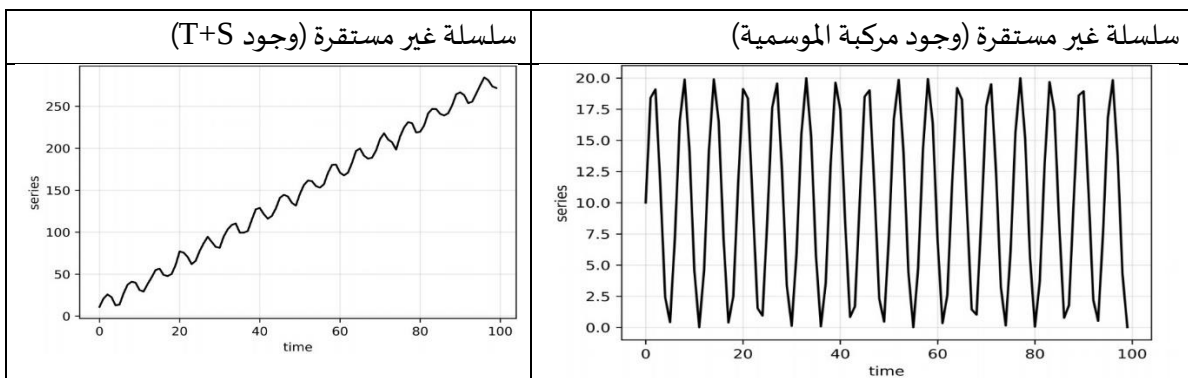
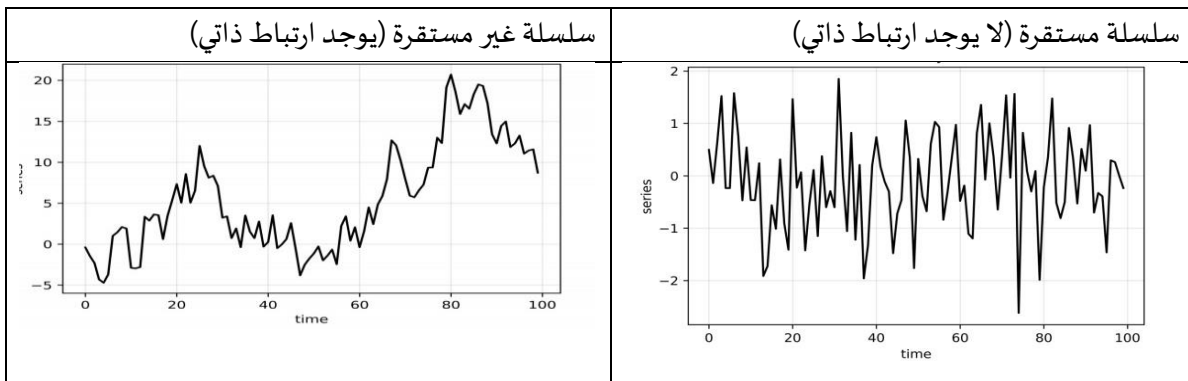
أ- ثبات المتوسط، بمعنى لا يوجد توجه عام (no trend)



ب- ثبات التباين عبر الزمن: بمعنى تجانس التباين ولا وجود لمشكلة الارتباط الذاتي (no heteroscedasticity).



ت- الارتباط الذاتي (No autocorrelation)



والسؤال الجوهرى: لماذا تعتبر دراسة الاستقرارية مهمة وكيف يمكن التعرف على السلاسل غير المستقرة؟

✓ بدون الإستقرارية تصبح نماذج السلاسل الزمنية غير صالحة؛

✓ ضرورة عمل تحويلات قبل النمذجة للسلاسل غير المستقرة حتى تصبح مستقرة؛

يعد حساب المتوسط والتباين بمرور الوقت (تحديد مجموعة من القطع) طريقة مفيدة لتمييز ما إذا كانت السلسلة مستقرة أو غير مستقرة.

غير مستقرة (اختلاف تباين القطع)	غير مستقرة (اختلاف متوسط القطع)	مستقرة (القطع لها نفس المتوسط والتباين)																											
Data <table border="1"> <tr> <th>Chunk 1</th><th>Chunk 2</th><th>Chunk 3</th></tr> <tr> <td>Mean: 19.8</td><td>18.6</td><td>18.5</td></tr> <tr> <td>Variance: 11.8</td><td>40.6</td><td>41.3</td></tr> </table>	Chunk 1	Chunk 2	Chunk 3	Mean: 19.8	18.6	18.5	Variance: 11.8	40.6	41.3	Data <table border="1"> <tr> <th>Chunk 1</th><th>Chunk 2</th><th>Chunk 3</th></tr> <tr> <td>Mean: 19.8</td><td>30.6</td><td>49.5</td></tr> <tr> <td>Variance: 12.3</td><td>13.1</td><td>12.8</td></tr> </table>	Chunk 1	Chunk 2	Chunk 3	Mean: 19.8	30.6	49.5	Variance: 12.3	13.1	12.8	Data <table border="1"> <tr> <th>Chunk 1</th><th>Chunk 2</th><th>Chunk 3</th></tr> <tr> <td>Mean: 19.8</td><td>18.6</td><td>18.5</td></tr> <tr> <td>Variance: 12.3</td><td>13.1</td><td>12.8</td></tr> </table>	Chunk 1	Chunk 2	Chunk 3	Mean: 19.8	18.6	18.5	Variance: 12.3	13.1	12.8
Chunk 1	Chunk 2	Chunk 3																											
Mean: 19.8	18.6	18.5																											
Variance: 11.8	40.6	41.3																											
Chunk 1	Chunk 2	Chunk 3																											
Mean: 19.8	30.6	49.5																											
Variance: 12.3	13.1	12.8																											
Chunk 1	Chunk 2	Chunk 3																											
Mean: 19.8	18.6	18.5																											
Variance: 12.3	13.1	12.8																											

سلسلة التشويش الأبيض أو الضجّة البيضاء (White Noise): تعرف سلسلة الضجّة البيضاء على أنها عبارة متتابعة من المشاهدات المستقلة فيما بينها ولها توزيعات متطابقة بمتوسط معدوم وتباين ثابت. أي:

$$1 - E(\varepsilon_t) = 0, \forall t$$

$$2 - Cov(X_t, X_{t_1}) = \begin{cases} \sigma^2, \forall t, \forall t_1, t = t_1 \\ 0, \forall t, \forall t_1, t \neq t_1 \end{cases}$$

دالة الارتباط الذاتي:

1. تعاريف:

إذا عرفنا التخلّف h على أنه الفترة الزمنية التي تفضل بين X_t وبين X_{t-h} أو X_{t+h} فإن:

دالة الارتباط الذاتي (FAC) هي الدالة التي تقيس الارتباط بين السلسلة X_t ونفس السلسلة بتأخير قدره h أي X_{t-h} ونرمز لها

$$\rho_h = \frac{Cov(X_t, X_{t-h})}{\sigma_{X_t} \times \sigma_{X_{t-h}}}$$
 بالرمز ρ_h حيث:

وعملياً نستعمل مقدرة دالة الارتباط الذاتي وهي:

$$\hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=h+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}$$

مثال: أحسب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخيرات $h=1, h=2, h=3$ للسلسلة التالية: **$X_t: 12, 11, 10, 10, 8, 9$**

1- حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدرة 1.

T	X_t	$X_{(t-1)}$	X_{t-m}	$X_{(t-1)-m}$	$(X_{t-m})(X_{(t-1)-m})$	$(X_{t-m})^2$
1	12		2			4
2	11	12	1	2	2	1
3	10	11	0	1	0	0
4	10	10	0	0	0	0
5	8	10	-2	0	0	4
6	9	8	-1	-2	2	1
m	10		0		4	10

$$\hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=h+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}$$

$$r_1 = \frac{4}{10} = 0.4$$

2- حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدرة 2.

T	X _t	X _(t-2)	X _{t-m}	X _{(t-2)-m}	(X _{t-m})(X _{(t-2)-m})	(X _{t-m}) ²
1	12		2			4
2	11		1			1
3	10	12	0	2	0	0
4	10	11	0	1	0	0
5	8	10	-2	0	0	4
6	9	10	-1	0	0	1
m	10		0		0	10

$$r^2 = \frac{0}{10} = 0$$

3- حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدرة 3.

T	X _t	X _(t-3)	X _{t-m}	X _{(t-3)-m}	(X _{t-m})(X _{(t-3)-m})	(X _{t-m}) ²
1	12		2			4
2	11		1			1
3	10		0			0
4	10	12	0	2	0	0
5	8	11	-2	1	-2	4
6	9	10	-1	0	0	1
m	10		0		-2	10

$$r^2 = \frac{-2}{10} = -0.2$$

2. خواص دالة الارتباط الذاتي:

- ✓ دالة الارتباط الذاتي متناظرة حول الصفر: $\rho(h) = \rho(-h)$;
- ✓ دالة الارتباط الذاتي محصورة بين ± 1 : أي: $-1 \leq \rho(h) \leq 1$;
- ✓ $\rho_0 = \frac{Cov(X_t, X_{t-0})}{\sigma_{X_t} \times \sigma_{X_{t-0}}} = \rho_0 = \frac{Cov(X_t, X)}{\sigma_{X_t} \times \sigma_{X_t}} = \frac{Var(X_t)}{Var(X_t)} = 1$: $\rho(0) = 1$ فإن $h=0$;
- ✓ يسمى التمثيل البياني لقيم دالة الارتباط الذاتي بـ (correlogramme) وتتراوح قيمته بين ± 1 ;
- ✓ عمليا إذا كانت البيانات شهرية أو فصلية نأخذ $h=24$ ، أما إذا كانت البيانات يومية نأخذ قيمة التأخير $30 \leq h \leq 36$ ، أما في حالة المعطيات السنوية فنأخذ $15 \leq h \leq 20$

3. تحليل دالة الارتباط الذاتي: لقيم دالة الارتباط الذاتي دور كبير في تحليل مركبات السلسلة الزمنية ودراسة مدى استقراريتها.

❖ مجال الثقة لدالة الارتباط الذاتي:

- في حالة العينات الكبرى ($n \geq 30$) فإن rh تتوزع حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم:

$$rh \rightarrow N\left(0, \text{var}(rh) = \frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^h r_i^2\right)\right)$$

ويكون مجال الثقة بمستوى معنوية 5% هو: $rh \in [-1.96\sqrt{\text{var}(rh)}, 1.96\sqrt{\text{var}(rh)}]$

كانت قيم rh تقع داخل مجال الثقة فإننا نقبل فرضية العدم؛ أي $\rho h = 0$ بمستوى معنوية 5%؛ بمعنى إذا كانت كل معاملات الارتباط تقع داخل مجال الثقة فهي معدومة احصائيا وبالتالي يمكن القول أن السلسلة لا توجد بها مركبة الاتجاه العام ولا مركبة الموسمية وبالتالي فهي مستقرة داخل المجال: $rh \in [-1.96 / \sqrt{n}, 1.96 / \sqrt{n}]$.

دالة الارتباط الذاتي الجزئي: La fonction d'autocorrélation partielle

إن دالة الارتباط الذاتي الجزئي (FAP) تقيس الارتباط بين السلسلة X_t ونفس السلسلة بتأخير قدره h : أي $X(t-h)$ بعد إزالة تأثير الترابط الناتج عن القيم التي بينهما ($X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-h+1}$). نرمز لها بالرمز ϕ_{hh} أو ϕ_{kk} ونكتب:

$$\text{لما } h=0 \text{ فإن: } \phi_{kk} = \phi_{00} = 1$$

$$\text{لما } h=1 \text{ فإن: } \phi_{kk} = \phi_{11} = r_1$$

$$\text{لما } h=2, 3, \dots \text{ نحسب قيم دالة الارتباط الذاتي بالعلاقة التالية: } \phi_{kk} = \rho_{kk} = r_{kk} = \frac{|\rho_k^*|}{|\rho_k|}$$

حيث: | | يرمز إلى محدد المصفوفة و ρ_h هي مصفوفة مربعة ذات البعد h :

$$P_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \dots & \rho_{k-1} \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \rho_{k-1} & & & & 1 \end{bmatrix} \quad P_k^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \dots & \rho_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ \rho_{k-1} & & & & \rho_k \end{bmatrix}$$

مثال: أحسب قيم دالة الارتباط الذاتي الجزئي في حالة: $h=1, h=2, h=3$ للمثال السابق.

لدينا: $r_1=0.4, r_2=0, r_3=-0.2$

$$\text{لما } h=1 \text{ فإن: } \phi_{kk} = \rho_{11} = r_1 = 0.4 \quad \checkmark$$

$$\rho_{22} = r_{22} = \frac{|\rho_2^*|}{|\rho_2|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 - (0.4)^2}{1 - (0.4)^2} = -0.190 \quad \text{لما } h=2 \text{ فإن: } \checkmark$$

$$\text{لما } h=3 \text{ فإن: } \checkmark$$

$$\rho_{33} = r_{33} = \frac{|\rho_3^*|}{|\rho_3|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 - (0.4)^2}{1 - (0.4)^2} = -0.190$$