Chapitre 2

Homotopie des chemains

Soit X un e.T. $\quad x_0, y_0 \in X$

Définition 2.0.1. *On appelle chemain de X d'origine x_0 et d'extrimité y_0 toute application continue :* $\begin{cases} \mu : [0,1] \longrightarrow X \\ \mu(0) = x_0 \quad et \quad \mu(1) = y_0 \end{cases}$

Deux chemains μ et λ de X qui ont même origine et même éxtrimité sont dit homotopes ssi : $\exists F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ *continue :*

$$\begin{cases} F(t,0) & = \mu(t) \\ F(t,1) & = \lambda(t) \\ F(0, \mathcal{T}) & = x_0 \\ F(1, \mathcal{T}) & = y_0 \end{cases} \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall \mathcal{T} \in [0,1]$$

Remarque 2.0.1. *On peut redéfinie l'homotopie des chemains grâce à l'homotopie relative. En effet deux chemains μ et λ d'origine x_0 et d'extrimité y_0 sont homotopes $\Longleftrightarrow \mu \sim \lambda$ (relative $[0,1]$)*

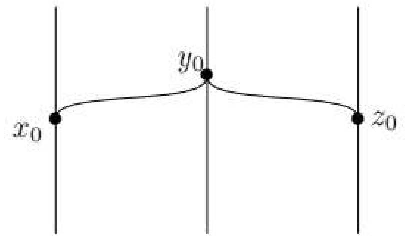
En effet la condition : $\begin{cases} F(0, \mathcal{T}) & = x_0 \Longleftrightarrow F(0, \mathcal{T}) = \mu(0) = \lambda(0) = x_0 \\ F(1, \mathcal{T}) & = y_0 \Longleftrightarrow F(1, \mathcal{T}) = \mu(1) = \lambda(1) = y_0 \end{cases}$

2.1 Propriété de l'homotopie des chemains

2.1.1 Opération sur les chemains

Compose des chemains (concaténation des chemains)

Soient μ un chemain de X d'origine x_0 et éxtrimité y_0 et λ un chemain de X d'origine y_0 et éxtrimité $z_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu \ : [0,1] \longrightarrow X \text{ continue } \mu(0) = x_0, \mu(1) = y_0 \\ \\ \lambda \ : [0,1] \longrightarrow X \text{ continue } \lambda(0) = x_0, \lambda(1) = z_0 \end{cases}$



On appelle concatiné des chemains μ et λ le chemain noté :

$\mu \cdot \lambda : [0,1] \longrightarrow X$ avec : $(\mu \cdot \lambda)(t) : \begin{cases} \mu(2t) & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \\ \lambda(2t-1) & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

la composé $(\mu \cdot \lambda)$ a pour origine $x_0 = (\mu \cdot \lambda)(0) = \mu(0)$ et éxtrimité

$z_0 = (\mu \cdot \lambda)(1) = \lambda(1)$

Remarque 2.1.1. *gâce à la concaténation on a introduit une loi de composition dans l'ensemble des chemains et cette composition n'est pas toujours définie cette loi opère dand l'ensemble* $\bigcup\limits_{x,y} \subset (X, \{x, y\})$ *qui est l'ensemble de tous les chemains de* X.

Propiété de composition avec l'homotopie

Proposition 2.1.1. *Soient* $\mu \in\subset (X, \{x_0, y_0\}), \lambda \in\subset (X, \{y_0, z_0\}), \varphi \in\subset (X, \{z_0, l_0\})$ *on a alors les chemains* $(\mu \cdot \lambda) \cdot \varphi \in\subset (X, \{x_0, l_0\})$ *et* $\mu \cdot (\lambda \cdot \varphi) \in\subset (X, \{x_0, l_0\})$ *ces deux chemains ne sont pas égaux cependant :* $(\mu \cdot \lambda) \cdot \varphi \cong \mu \cdot (\lambda \cdot \varphi)$

Remarque 2.1.2. *Dans* $\mathbb{R}$ *tous les intervales du type* $[a, b]$ *sont homotope à* $[0, 1]$ *l'homotope de passage de* $[a, b] \longrightarrow [0, 1]$ *est* $y = \dfrac{x-a}{b-a}$
Montrons que $\mu \cdot (\lambda \cdot \varphi)$ *et* $(\mu \cdot \lambda) \cdot \varphi$ *sont deux chemains déffirents.*

$$\textit{Soit } t \in [0,1] \textit{ alors : } (\mu\cdot\lambda)\cdot\varphi(t) : \begin{cases} (\mu\cdot\lambda)(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \varphi(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$: \begin{cases} \mu(2\times 2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \lambda(2\times 2t-1) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \varphi(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$: \begin{cases} \mu(4t) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \lambda(4t-1) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \varphi(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\mu\cdot(\lambda\cdot\varphi)(t) : \begin{cases} \mu(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (\lambda\cdot\varphi)(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$: \begin{cases} \mu(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \lambda(2\times(2t-1)) & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \varphi(2\times(2t-1)-1) & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$: \begin{cases} \mu(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \lambda(4t-2) & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \varphi(4t-3) & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

donc : $(\mu\cdot\lambda)\cdot\varphi \neq \mu\cdot(\lambda\cdot\varphi)(t)$

prouvons que $\mu\cdot(\lambda\cdot\varphi)(t) \sim (\mu\cdot\lambda)\cdot\varphi$

considérons le carré de l'homotopie

$$\textit{Soit } t \in [0,1] \textit{ alors : } (\mu \cdot \lambda) \cdot \varphi(t) : \begin{cases} (\mu \cdot \lambda)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$: \begin{cases} \mu(2 \times 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \lambda(2 \times 2t - 1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$: \begin{cases} \mu(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \lambda(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\mu \cdot (\lambda \cdot \varphi)(t) : \begin{cases} \mu(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\lambda \cdot \varphi)(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

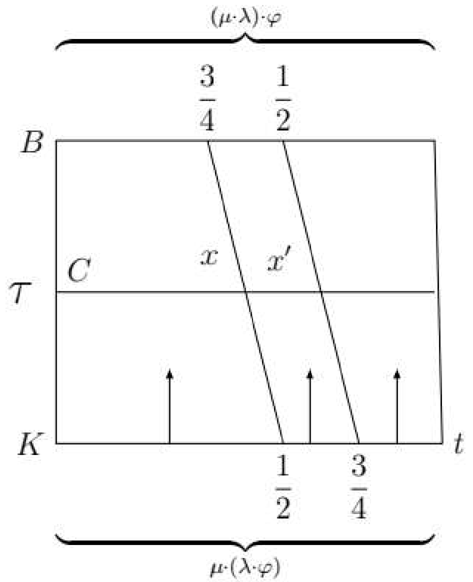
$$: \begin{cases} \mu(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \lambda(2 \times (2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \varphi(2 \times (2t-1) - 1) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$: \begin{cases} \mu(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \lambda(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \varphi(4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donc : $(\mu \cdot \lambda) \cdot \varphi \neq \mu \cdot (\lambda \cdot \varphi)(t)$

prouvons que $\mu \cdot (\lambda \cdot \varphi)(t) \sim (\mu \cdot \lambda) \cdot \varphi$

considérons le carré de l'homotopie

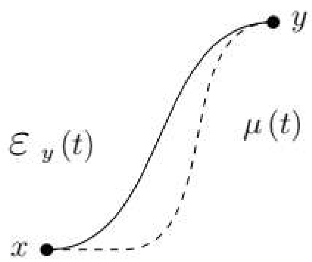


$$\frac{AK}{AB} = \frac{KL}{BC} \Rightarrow AB = \frac{\frac{x}{1}}{4} = \frac{AC}{BC} = \frac{2-\ \mathcal{T}}{1-\ \mathcal{T}} \Rightarrow x = \frac{2-\ \mathcal{T}}{4-4\ \mathcal{T}}$$

$$F:[0,1]{\times}[0,1] \longrightarrow X \ \text{où} \ : F(t,\ \mathcal{T}\ ) = \begin{cases} \mu\left(\dfrac{4t}{1+\ \mathcal{T}}\right) & 0 \le t \le \dfrac{1+\ \mathcal{T}}{4} \\ \lambda(4t-\ \mathcal{T}\ -1) & \dfrac{1+\ \mathcal{T}}{4} \le t \le \dfrac{2+\ \mathcal{T}}{4} \\ \varphi\left(\dfrac{4t-\ \mathcal{T}\ -2}{2-\ \mathcal{T}}\right) & \dfrac{2+\ \mathcal{T}}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

Proposition 2.1.2. *Soit* $\mu \in \subset (X,\{x,y\})$ *et* $\mathcal{E}_x \in \subset (X,\{x,x\})$ *et* $\mathcal{E}_y \in \subset (X,\{y,y\})$

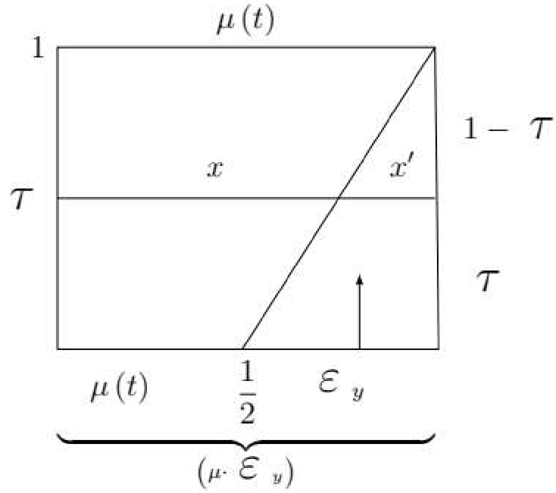
$$\textit{alors :} \begin{cases} \mu\cdot\ \mathcal{E}_y \neq \mu \\ \mathcal{E}_x \cdot \mu \neq \mu \end{cases} \qquad \textit{mais} \qquad \begin{cases} \mu\cdot\ \mathcal{E}_y \sim \mu \\ \mathcal{E}_x \cdot \mu \sim \mu \end{cases}$$



$$\textit{Calculon les chemains :}\ (\mu\cdot\ \mathcal{E}_y)(t) = \begin{cases} \mu(2t) & 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ \mathcal{E}_y(2t-1) & \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mu(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ y & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Montrons qu'ils sont homotopes :



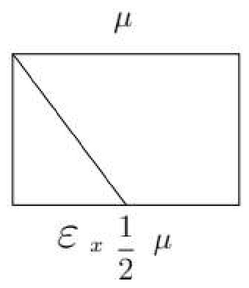
$$F(t, \mathcal{T}) = \begin{cases} \mu\left(\frac{2t}{1+\mathcal{T}}\right) & 0 \le t \le \frac{1+\mathcal{T}}{2} \\ \mathcal{E}_y(2t-1-\mathcal{T}) & \frac{1+\mathcal{T}}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mu\left(\frac{2t}{1+\mathcal{T}}\right) & 0 \le t \le \frac{1+\mathcal{T}}{2} \\ y & \frac{1+\mathcal{T}}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$F(t,0) = \begin{cases} \mu\left(\frac{2t}{1+0}\right) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ y & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} = (\mu \cdot \mathcal{E}_y)(t)$$

$$F(t,1) = \begin{cases} \mu\left(\frac{2t}{2}\right) & 0 \le t \le \frac{1+1}{2} \\ y & \frac{1+1}{2} \le t \le 1 \end{cases} = \begin{cases} \mu(t) & 0 \le t \le 1 \\ y & t = 1 \end{cases}$$

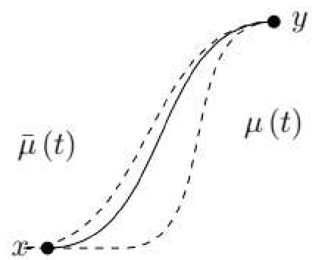
idem : $\varepsilon_x \cdot \mu \sim \mu$



Définition 2.1.1. *Soit* $\mu \in \subset (X, \{x, y\})$ *on appelle chemain inverse de* μ *le chemain* $\bar{\mu} \in \subset (X, \{x, y\})$ *où* $\bar{\mu} : [0,1] \longrightarrow X$ *avec* $\bar{\mu}(t) = \mu(1-t)$

Proposition 2.1.3. *Si* $\mu \in \subset (X, \{x, y\})$ *alors on a les chemains :*

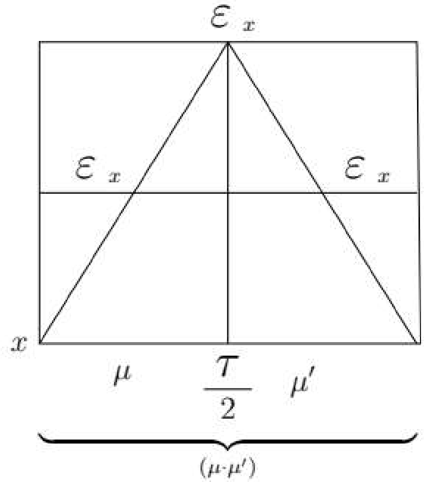
$$\begin{cases} \mu \cdot \bar{\mu} \neq \varepsilon_x \\ \bar{\mu} \cdot \mu \neq \varepsilon_y \end{cases} \quad \textit{mais} \quad \begin{cases} \mu \cdot \bar{\mu} \sim \varepsilon_x \\ \bar{\mu} \cdot \mu \sim \varepsilon_y \end{cases}$$



Calculons pour $t \in [0,1]$ *:* $(\mu \cdot \bar{\mu})(t) = \begin{cases} \mu(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\mu}(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \neq \varepsilon_x$

Montrons que $\mu \cdot \bar{\mu} \sim \varepsilon_x$ *pour cela on considère :*

considérons alors l'application : $F(t, \tau) = \begin{cases} x & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ \mu(2t - \tau) & \frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mu(2 - 2t - \tau) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2-\tau}{2} \\ x & \frac{2-\tau}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$



puisque pour $\bar{\mu}$ la variable est $(1-t)$, il faut trouver sont intervale lorsque $t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2-\ \mathcal{T}}{2}\right]$

$$\begin{cases} \mu\left(2, \frac{\mathcal{T}}{2} - \ \mathcal{T}\right) & = \mu(0) = x \\ \mu\left(2, \frac{1}{2} - \ \mathcal{T}\right) & = \mu(1,\ \mathcal{T}\ ) \\ \mu\left(2-2, \frac{\mathcal{T}}{2} - \ \mathcal{T}\right) & = \mu(1,\ \mathcal{T}\ ) \\ \mu(2-2,\ \mathcal{T}\ -\ \mathcal{T}\ ) & = \mu(0) = x \end{cases} \qquad \text{ex : vérifie que :} \begin{cases} F(t,0) & = (\mu\cdot\bar{\mu})(t) \\ F(t,1) & = \ \mathcal{E}_x(t) = x \end{cases}$$

idem : vérifie $\bar{\mu}\cdot\mu \sim\ \mathcal{E}_y$

Remarque 2.1.3. *En analysant les propriété de la concaténation et de l'homotopie des chemains constate que l'opération de composition des chemains (concaténation) vérifie les conceptes proches ceux les opérations interne à savoire l'associativité, neutre* $(\exists)$, *et le symétrique, pour cette raison on dit que* $\bigcup_{x,y\in X} \subset (X,\{x,y\})$ *muni de l'opération de concaténation est un groupoîde c.à.d : l'opération de concaténation n'existe pas toujours pour 2 chemains, cependant si elle* $\exists$ *c'est un chemain et de plus on la les propiété :*

1) $(\mu\cdot\lambda)\varphi \sim \mu\cdot(\lambda\cdot\varphi)$

2) $\mu\cdot\ \mathcal{E}_y \sim \mu$

3) $\mu\cdot\bar{\mu} \sim\ \mathcal{E}_x$

2.2 Groupe fondamentale, groupe de Poincaré

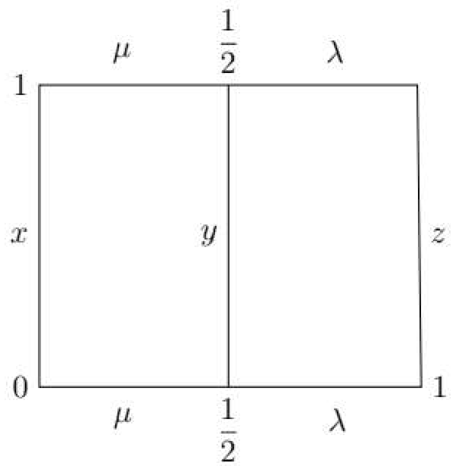
2.2.1 Groupe homotopique d'ordre 1

Proposition 2.2.1. *Soient* $\mu, \mu' \in\subset (X, \{x, y\})$ *et* $\lambda, \lambda' \in\subset (X, \{y, z\})$ *alors si :*

$$\begin{cases} \mu \sim \mu' \\ et \\ \lambda \sim \lambda' \end{cases} \quad alors \quad \mu \cdot \lambda \sim \mu' \cdot \lambda'$$

$$Puisque : \mu \sim \mu' \Longleftrightarrow \exists F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X \ continue \begin{cases} F(t,0) & = \mu(t) \\ F(t,1) & = \mu'(t) \\ F(0, \mathcal{T}) & = x \\ F(1, \mathcal{T}) & = y \end{cases}$$

$$\lambda \sim \lambda' \Longleftrightarrow \exists G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X \ continue \begin{cases} G(t,0) & = \lambda(t) \\ G(t,1) & = \lambda'(t) \\ G(0, \mathcal{T}) & = y \\ G(1, \mathcal{T}) & = z \end{cases}$$



Considérons : $H : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$ *continue :* $H(t, \tau) = \begin{cases} F(2t, \tau) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t-1, \tau) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

on vérifie que pour $t = \frac{1}{2}$ *on a y de plus :*

$$H(t, \tau) = \begin{cases} F(2t,0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t-1,0) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \mu(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \lambda(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

idem : $H(t,1) = (\mu' \cdot \lambda')(t)$

Considérons l'ensemble $L(X,x)$ qui est $\subset (X,\{x,y\})$ où $x = y$ ainsi $L(X,x)$ est l'ensemble des chemains de X d'origine confondire avec l'extrimité qui est x un élément de $L(X,x)$ s'appelle lacet de base x

Définition 2.2.1. *On appelle lacet de base* x *de* X *toute application continue :*
$\delta : [0,1] \longrightarrow X$ *avec :* $\delta(0) = \delta(1) = x$

Remarque 2.2.1. *Dans* $L(X,x)$ *on peut toujours faire l'opération de concatination de plus la concatination de deux éléments de* $L(X,x)$ *est un élément de* $L(X,x)$

Conséquence 2.2.1. $L(X,x)$ *muni de la loi de concaténation est un magma c.à.d la concaténation est un loi de composition interne dans* $L(X,x)$ *elle vérifie les propiété de concatination des chemains considérons* $L(X,x)/_\sim$ *l'ensemble des classes d'homotopie des lacet alors si* $\delta, \mu \in L(X,x)$ *alors leurs classe d'homotopie* $[\delta]$ *et* $[\mu] \in L(X,x)/_\sim$
On peut alors définit $[\delta]\cdot[\mu] = [\delta \cdot \mu] \in L(X,x)/_\sim$ *est une opération bien définit dans*

$$L(X,x)/_\sim \text{ car : } \begin{cases} \delta' \sim \delta \\ \mu' \sim \mu \end{cases} \Rightarrow \quad \delta' \cdot \mu' \sim \delta \cdot \mu \quad \Rightarrow \quad [\delta' \cdot \mu'] = [\delta \cdot \mu]$$

donc $(L(X,x)/_\sim, \cdot)$ *magma de plus on a :*

1) $(\delta \cdot \mu) \cdot \varphi \sim \delta \cdot (\mu \cdot \delta) \Longleftrightarrow ([\delta]\cdot[\mu])\cdot([\varphi]) = [\delta]([\mu]\cdot[\varphi])$

2) $\delta \cdot \mathcal{E}_x \sim \mathcal{E} \cdot \delta \Longleftrightarrow [\delta][\mathcal{E}_x] = [\delta] = [\mathcal{E}_x]\cdot[\delta] \Longleftrightarrow [\mathcal{E}_x]$ *neutre*

3) $\delta \cdot \delta' \sim \mathcal{E}_x \sim \delta \cdot \delta' \Longleftrightarrow [\delta]\cdot[\delta'] = [\mathcal{E}_x] = [\delta']\cdot[\delta] \Longleftrightarrow [\delta'] = [\delta]^{-1}$

Conclusion 2.2.1. $(L(X,x)/_{\sim}, \cdot)$ *groupe*

on le note : $\Pi_1(X,x)$ *groupe fondamentale de* X *base* x = *groupe Poincaré de* X *base* x = *groupe homotopique d'ordre* 1 *de* X *base* x

Remarque 2.2.2. *Dans* $L(X,x_0)$ *on peut considére* $\delta \cdot \mu$, $\mu \cdot \delta$ *en générale* $\delta : \mu \nsim \mu \cdot \delta$ *alors :* $\Pi_1(X,x)$ *en générale n'est pas abélien*

L'homotopie fut introuduit hom Poincaré pour classifie des surfaces (varietés bidimebsionnelles) grâce aux groupe hpmotopique on a une classification complete des variétés bidimentionelles ce qui a conduit en 1904 *Poincaré a posé le problème : est que tout variété tridimentionelle compacte sans bord qui a un groupe fondementale trivial à même type d'homotopie que* S^3?

Ce problème est comme sous le non de "conjecture de Poincaré" sa résolution en dimension 3 *a été mise a prix pour* 1 *million de dolar en* 2003 *Gricha Perelman a resolu ce problème il reçu la medaille filds en tout* 2006, *conference Int de Madrid Institue Stek Lor du Lebingiad*

2.2.2 Application continue et groupes fondamentale

Soit $f : (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ application continue c.à.d $f \in Mor_{\overset{\bullet}{\widehat{\mathrm{Top}}}}((X,x_0),(Y,y_0))$ alors si $\delta \in L(X,x_0)$ on a la composition suivante :

$$\begin{tikzcd} f\circ\delta : [0,1] \arrow[r, "\delta"] \arrow[rr, bend right] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$ est une application de $[0,1] \longrightarrow Y$ de plus :

$$\begin{cases} f\circ\delta(0) & = f(x_0) = y_0 \\ \\ f\circ\delta(1) & = f(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{c.à.d } f\circ\delta \in L(Y,y_0)$$

c.à.d $f\circ\delta$ est un lacet de Y basé en y_0

En constate également d'aprés les prpositions étudieés de l'homotopie que si $\delta, \delta' \in L(X,x_0)/\delta \sim \delta'$ alors in sait que $f\circ\delta \sim f\circ\delta'$ d'où

Proposition 2.2.2. *Si toute application continue* $f : (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ *induit une application* $\Pi_1(f) : \Pi(X,x_0) \longrightarrow \Pi(Y,y_0)$ *donée par :* $\Pi_1(f)([\delta]) = [f\circ\delta]$, $\forall[\delta] \in \Pi_1(X,x_0)$ *de plus* $\Pi_1(f)$ *est un hméomorphisme de groupes :* $\Pi_1(f)$ *est correctement donée en vertue de* ..

Prouvons que $\Pi_1(f)$ *est héomorphisme de groupes :*

En effet si $[\delta], [\mu] \in \Pi_1(X,x_0)$ *alors :* $\Pi_1(f)([\delta]\cdot[\mu]) = \Pi_1(f)([\delta\cdot\mu]) = [f\circ(\delta\cdot\mu)]$

évaluons : $f \circ (\delta \cdot \mu) : [0,1] \longrightarrow Y \quad (\delta \cdot \mu)(t) = \begin{cases} \delta(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mu(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow f \circ (\delta \cdot \mu) = \begin{cases} f(\delta(2t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(\mu(2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ainsi $f \circ (\delta \cdot \mu) = (f \circ \delta) \cdot (f \circ \mu) = \begin{cases} f \circ \delta(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f \circ \mu(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

ainsi : $\Pi_1(f)([\delta] \cdot [\mu]) = [(f \circ \delta) \cdot (f \circ \mu)] = [f \circ \delta] \cdot [f \circ \mu] = \Pi_1(f)([\delta]) \cdot \Pi_1(f)([\mu])$

Proposition 2.2.3. *On a les assertions suivantes :*

1) $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0), \quad g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ *alors :*
   $g \circ f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ *et on a :* $\Pi_1(g \circ f) = \Pi_1(g) \circ \Pi_1(f)$
2) *Si* $Id : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *morphisme identité alors :* $\Pi_1\left(Id_{\{X,x_0\}}\right) = Id_{\Pi_1(X,x_0)}$

1) *Si* $(g \circ f) : (X, x_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ *on a :* $\Pi_1(g \circ f) : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Z, z_0)$
   Soit $[\delta] \in \Pi_1(X, x_0)$ *alors :* $\Pi_1(g \circ f)([\delta]) = [(g \circ f) \circ \delta] = [g \circ (f \circ \delta)] = \Pi_1(g)([f \circ \delta])$
   $= \Pi_1(g)(\Pi_1(f)[\delta]) = \Pi_1(g) \circ \Pi_1(f)([\delta])$
2) *Soit* $Id : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *alors :* $\Pi_1\left(Id_{\{X,x_0\}}\right) : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0)$
   Si $[\delta] \in \Pi_1(X, x_0)$ *on a :* $\Pi_1\left(Id_{\{X,x_0\}}\right)([\delta]) = [Id_{\{X,x_0\}} \circ \delta] = [\delta] = Id_{\Pi_1(X,x_0)}$

Conséquence 2.2.2. *La relation :* $\overset{\bullet}{\widehat{Top}} \xrightarrow{T_1} Cg$ *donée par :*

1) $(X, x_0) \in obj_{\overset{\bullet}{\widehat{Top}}} \longrightarrow \Pi_1(X, x) \in obj_G$
2) $f \in Mor_{\overset{\bullet}{\widehat{Top}}}((X, x_0), (Y, y_0)) \longrightarrow \Pi_1(f) \in Mor_G(\Pi_1(X, x), \Pi_1(Y, y))$ *est un foncteur covariant*

   Π_1 *s'appelle foncteur homotopique d'ordre* 1

Théorème 2.2.1. *Classification :*

Si (X, x) *et* (Y, y) *sont deux éspaces topologiques pointés homotopie (du même type topologique). Alors leurs groupes de Poincaré* $\Pi_1(X, x)$ *et* $\Pi_1(Y, y)$ *sont des groupes isomorphes*

En effet l'image d'objetes isomorphes par un foncteur sont isomorphes

i.e $(X, x) \cong (Y, y)$ *dans* $\overset{\bullet}{\widehat{Top}} \iff$ *hméomorphe* $\Rightarrow \Pi_1(X, x) \cong \Pi_1(Y, y)$ *dans* Cg

Conséquence 2.2.3. *Si* $(X,x),(Y,y)$ *sont 2 éspaces topologiques tq :* $\Pi_1(X,x)$ *n'est pas isomorphes à* $\Pi_1(Y,y)$ *alors :* (X,x) *et* (Y,y) *ne sont pas de même type homotopique*

Conjecture de Poincaré 1904

X variété de dimension 3 compacte (Top) sans bord tq :
$\Pi_1(X)$ est triviale $\Rightarrow X$ de même type homotopiques que S^3

Répense : 2002- 2008 par Gricha Perlmane

X variété de dimension 3 sans bord $\Longleftrightarrow \forall x \in X$ admet un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^3$

2.3 Homotopie des applcations continues et groupe de Poincaré

On sait que si $f:(X,x) \longrightarrow (Y,y)$ application continue alors elle induit
$\Pi_1(f):\Pi_1(X,x) \longrightarrow \Pi_1(Y,y)$
Soit $g:(X,x) \longrightarrow (Y,y)$ elle induit $\Pi_1(g):\Pi_1(X,x) \longrightarrow \Pi_1(Y,y)$

Théorème 2.3.1. *Sous les conditions des hypothèses ci-dessue : si* $f \sim g \Rightarrow \Pi_1(f) = \Pi_1(g)$ *deux applications homotopes induise le même induction*
En effet soit $[\delta] \in \Pi_1(X,x) \Rightarrow \Pi_1(f)([\delta]) = [f\circ\delta]$ *or* $f \sim g \Rightarrow f\circ\delta \sim g\circ\delta \Rightarrow [f\circ\delta] = [g\circ\delta] \Rightarrow \Pi_1(f) = \Pi_1(g)$

Conséquence 2.3.1. *Critère homotopique : si* $\Pi_1(f) \neq \Pi_1(g) \Rightarrow f \nsim g$

Théorème 2.3.2. *Si* (X,x) *et* (Y,y) *sont deux e.T.p homotopes c.à.d de même type homotopique alors :* $\Pi_1(X,x) \cong \Pi_1(Y,y)$

Soit (X,x) *et* (Y,y) *homotopiquement équivalents* $\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists f:(X,x) \longrightarrow (Y,y) \ \ \textit{continue} \\ \\ \exists g:(Y,y) \longrightarrow (X,x) \ \ \textit{continue} \end{cases}$

$$\textit{avec :} \begin{cases} g\circ f \sim Id_{(X,x)} & \Rightarrow \Pi_1(g\circ f) = \Pi\left(Id_{(X,x)}\right) \\ \\ f\circ g \sim Id_{(Y,y)} & \Rightarrow \Pi_1(f\circ g) = \Pi\left(Id_{(Y,y)}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pi_1(g) \circ \Pi_1(f) = Id_{\Pi_1(X,x)} \\ \\ \Pi_1(f) \circ \Pi_1(g) = Id_{\Pi_1(Y,y)} \end{cases} \Rightarrow \Pi_1(X,x) \cong \Pi_1(Y,y) \quad \textit{inverse l'un de l'autres}$$

Conséquence 2.3.2. $\Pi_1(X,x) \ncong \Pi_1(Y,y) \Rightarrow (X,x)$ *et* (Y,y) *ne sont pas homotopes*

2.3.1 Changement de base et groupe de Poincaré

Soit X un e.T et x, y deux éléments données de X on a alors les éspaces topologiques pointés (X,x) et (Y,y) et donc on a les groupes de Poincaré $\Pi_1(X,x)$ et $\Pi_1(Y,y)$

Problème

Existe il un bien entre eux ?

Théorème 2.3.3. *S'il éxiste un chemain ω dans X qui lie x à y alors les groupes $\Pi_1(X,x)$ et $\Pi_1(Y,y)$ sont isomorphes*

Considérons : $L_1(X,x)$ et $L_1(Y,y)$ les lacets basé sur x

$L_1(X,x) = \{\delta : [0,1] \longrightarrow X / \delta(0) = \delta(1) = x\}$

$L_1(Y,y) = \{\mu : [0,1] \longrightarrow Y / \mu(0) = \mu(1) = y\}$

On veut passé d'un lacet de $L_1(X,x)$ a un lacet de $L_1(Y,y)$ alors considérons :

$(\bar{\omega} \cdot \delta) \cdot \omega$ *où* $\bar{\omega} \cdot (\delta \cdot \omega)$ *du fait que* $(\bar{\omega} \cdot \delta) \cdot \omega \sim \bar{\omega} \cdot (\delta \cdot \omega)$ *dans* $\Pi_1(Y,y)$ *on a :*

$[(\bar{\omega} \cdot \delta) \cdot \omega] = [\bar{\omega} \cdot (\delta \cdot \omega)]$ *noté* $[\bar{\omega} \cdot \delta \cdot \omega]$ *considérons de l'isomorphes :*

Soit : $\Pi_1(X,x) \xrightarrow{\varphi_\omega} \Pi_1(Y,y)$ *donnée par :* $\varphi_\omega([\delta]) = [\bar{\omega} \cdot \delta \cdot \omega] \quad , \forall [\delta] \in \Pi_1(X,x)$

Cette application est bien définie car : si $\delta' \in [\delta]$ alors : $\delta' \sim \delta \Rightarrow \bar{\omega} \cdot \delta \cdot \omega \sim \bar{\omega} \cdot \delta' \cdot \omega$ c.à.d

$[\bar{\omega} \cdot \delta \cdot \omega] = [\bar{\omega} \cdot \delta' \cdot \omega]$

1) ***bijection*** *Soit*

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{\omega}} : \Pi_1(Y,y) &\longrightarrow \Pi_1(X,x) \\ [\mu] &\longrightarrow [\omega \cdot \mu \cdot \bar{\omega}] \end{aligned} \qquad \textit{alors pour : } [\delta] \in \Pi_1(X,x) \textit{ on a :}$$

$\varphi_{\bar{\omega}} \circ \varphi_\omega([\delta]) = \varphi_{\bar{\omega}}([\bar{\omega} \cdot \delta \cdot \omega]) = [\omega \cdot \bar{\omega} \cdot \delta \cdot \omega \cdot \bar{\omega}] = [\mathcal{E}_x \cdot \delta \cdot \mathcal{E}_x] = [\delta] = Id_{\Pi_1(X,x)}([\delta])$

Idem : $[\mu] \in \Pi_1(Y,y) : \varphi_\omega \circ \varphi_{\bar{\omega}}([\mu]) = [\bar{\omega} \cdot \omega \cdot \delta \cdot \bar{\omega} \cdot \omega] = [\mathcal{E}_y \cdot \delta \cdot \mathcal{E}_y] = [\mu] = Id_{\Pi_1(Y,y)}([\mu])$

Conclusion 2.3.1. $(\varphi_\omega)^{-1} = \varphi_{\bar{\omega}}$ *i.e φ_ω est une bijection*

2) ***φ_ω est un homéomorphisme*** *Soit $[\delta], [\mu] \in \Pi_1(X,x)$ alors :*

$$\varphi_\omega : \Pi_1(X,x) \longrightarrow \Pi_1(Y,y) : \begin{cases} \varphi_\omega([\delta]\cdot[\mu]) & = \varphi_\omega([\delta\cdot\mu]) = [\bar{\omega}\cdot\delta\cdot\mu\cdot\omega] \\ & = [(\bar{\omega}\cdot\delta\cdot\omega)\cdot(\bar{\omega}\cdot\mu\cdot\omega)] \\ & = \varphi_\omega([\delta])\cdot\varphi_\omega([\mu]) \end{cases}$$

Conséquence 2.3.3. *φ_ω est un isomorphisme*

Proposition 2.3.1. *Si $\omega' \in [\omega]$ alors : $\varphi_{\omega'} = \varphi_\omega$ c.à.d l'isomorphisme est indépendant de la classe d'homotopie des chemains qui lie x à y*
En effet : si $[\delta] \in \Pi_1(X,x)$ et $\omega' \in [\omega]$ alors : $\bar{\omega}\cdot\delta\cdot\omega \sim \bar{\omega}'\cdot\delta\cdot\omega'$ car si $\omega \sim \omega' \Rightarrow \bar{\omega} \sim \bar{\omega}'$
$\varphi_\omega[\delta] = \varphi_{\omega'}[\delta]$ c'est pour cette raison que l'isomorphisme $\varphi_\omega = \varphi_{\omega'}$

Conséquence 2.3.4. *Si X est un éspace topologique connexe par arcs alorstous les groupes de Poincaré de X sont isomorphes i.e : $\Pi_1(X,x) \backsimeq \Pi_1(Y,y) \quad ,\forall x,y \in X$*
En effet : si X est connexe par arcs $\Rightarrow \exists$ un chemain qui lie x et y dans X donc par conséquent d'aprés la p.p ci dessues : $\Pi_1(X,x) \backsimeq \Pi_1(Y,y)$ ainsi : si X connexe par arcs on peut omettre le point de base et on note $\Pi_1(X)$

Autre considération :
$$(X,x_0) \begin{array}{l} \xrightarrow{f} (Y,f(x_0)) \\ \xrightarrow{g} (Y,g(x_0)) \end{array} \longrightarrow \Pi_1(X,x_0) \begin{array}{l} \xrightarrow{\tilde{f}=\Pi_1(f)} \Pi_1(Y,f(x_0)) \\ \xrightarrow{\tilde{g}=\Pi_1(g)} \Pi_1(Y,g(x_0)) \end{array}$$

Si on suppose qu'il éxiste un chemain ω qui lie $f(x)$ et $g(x)$ dans Y on sait qu'il éxiste un isomorphisme $\varphi_\omega : \Pi_1(Y,f(x_0)) \longrightarrow \Pi_1(Y,g(x_0))$

Problème

Existe il un chemain ω qui lie $f(x_0)$ à $g(x_0)$ tq : le diagramme soit commutatif

Théorème 2.3.4. *Sous les hypothèses ci dessues si f et g sont homotopes alors ils éxiste un chemain ω qui lie $f(x)$ à $g(x)$ dans Y et tq : le diagramme est commutatif*

Puisque $f \sim g$ pour $x_0 \in X$ les éléments de $f(x_0)$ et $g(x_0)$ sont dans une même composantes connexes

Considérons maintenant le chemain : $F_{x_0} : [0,1] \longrightarrow Y, \quad F_{x_0}(t) = F(x_0,t)$

$$F(x_0,t) : X\times[0,1] \longrightarrow Y : \begin{cases} F(x_0,0) & = f(x_0) \\ F(x_0,1) & = g(x_0) \end{cases}$$

F Continue ?

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & f\left(\dfrac{4\cdot\frac{1+\ \mathcal{T}}{4}}{1+\ \mathcal{T}}\right)=f\left(1\right)=y \\ t=\dfrac{1+\ \mathcal{T}}{4} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & g\left(\dfrac{4\cdot\frac{1+\ \mathcal{T}}{4}}{1+\ \mathcal{T}}-1\cdot\ \mathcal{T}\ \right)=g\left(0\right)=y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & g\left(4\cdot\dfrac{2+\ \mathcal{T}}{4}-1-\ \mathcal{T}\ \right)=g\left(2+\ \mathcal{T}\ -1-\ \mathcal{T}\ \right)=g\left(1\right)=z \\ t=\dfrac{2+\ \mathcal{T}}{4} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & h\left(\dfrac{4\cdot\frac{2+\ \mathcal{T}}{4}-2-\ \mathcal{T}}{2-\ \mathcal{T}}\right)=h\left(0\right)=y \end{tikzcd}$$

$\mathcal{T}\ =0$

$$F\left(t,0\right)=\begin{cases} f\left(4t\right) & 0\leq t\leq\dfrac{1}{4} \\ g\left(4t-1\right) & \dfrac{1}{4}\leq t\leq\dfrac{1}{2} \\ h\left(2t-1\right) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases} \quad =\left(f\cdot g\right)\cdot h\left(t\right)$$

$\mathcal{T}\ =1$

$$F\left(t,1\right)=\begin{cases} f\left(2t\right) & 0\leq t\leq\dfrac{1}{4} \\ g\left(4t-2\right) & \dfrac{1}{4}\leq t\leq\dfrac{1}{2} \\ h\left(4t-3\right) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases} \quad =f\cdot\left(g\cdot h\right)\left(t\right)$$